

Relazione finale progetto

Adeguamento dell'organizzazione e dello svolgimento degli Esami di Stato alle modifiche introdotte con il riordino di cui ai DD.PP.RR. 87, 88, 89 del 2010

MATEMATICA

a cura di Achille Maffini

Sommario

| | |
|---|----|
| Presentazione del lavoro | 4 |
| Aspetti organizzativi | 6 |
| Allegato A | 8 |
| Allegato C | 10 |
| Allegato G | 13 |
| Allegato H | 16 |
| Proposta di un Syllabus di matematica per i Licei Scientifici (nuovo ordinamento) | 16 |
| SYLLABUS di MATEMATICA per i LICEI SCIENTIFICI Quinto anno | 16 |
| APPENDICE | 19 |
| Analisi delle prove PNI | 22 |
| ALLEGATO 1 | 23 |
| ALLEGATO 2 | 25 |
| Allegato I | 26 |
| Allegato J | 38 |
| Allegato K | 50 |
| Allegato L | 51 |
| Allegato M | 61 |
| Allegato N | 72 |
| Allegato O | 76 |
| Allegato P | 77 |
| Allegato Q | 80 |
| Quesiti obbligatori | 81 |
| Analisi | 81 |
| Analisi applicata alla fisica | 87 |
| Statistica | 88 |
| Geometria analitica dello spazio | 90 |
| Quesiti a scelta | 91 |
| Analisi | 91 |
| Analisi applicata alla fisica | 98 |

| | |
|---|-----|
| Geometria solida e geometria analitica dello spazio | 99 |
| Statistica | 103 |
| Varie | 105 |
| Probabilità | 105 |
| Goniometria e trigonometria..... | 106 |

Presentazione del lavoro

a cura del Prof. Giorgio Bolondi

La seconda prova scritta di matematica nell'esame di stato dei licei scientifici è il momento più “alto” per la matematica nella scuola italiana. Come tale, è sempre stata caricata di significati e di implicazioni che l'hanno portata a diventare l'elemento centrale nella costituzione del curriculum reale.

Di fatto, l'evoluzione della prova scritta ha spesso preceduto e condizionato l'evoluzione dei manuali scolastici e delle prassi di insegnamento. Nuovi contenuti sono via via entrati nella pratica scolastica, e il loro ingresso è stato spesso sancito quasi ufficialmente dalla prova di maturità.

È quindi del tutto naturale che gli insegnanti guardino con grande attenzione alle “novità” che di anno in anno vengono introdotte, formalmente o informalmente.

Le classi quinte dell'anno scolastico 2014/15 saranno le prime che affronteranno l'Esame di Stato dopo aver percorso tutto il secondo ciclo nella scuola riformata. In particolare, i ragazzi del Liceo Scientifico hanno seguito per tutti e cinque gli anni le nuove Indicazioni Nazionali per il sistema dei Licei, e quelli dell'opzione delle Scienze Applicate sono stati i primi a seguire un percorso completamente nuovo.

Questi ultimi anni sono trascorsi quindi nell'attesa di indicazioni precise riguardo alle novità che la riforma introdurrà nell'esame di stato, e quest'attesa ha stimolato la discussione e il dibattito tra gli insegnanti.

Il percorso di formazione, studio e ricerca intrapreso dal gruppo di insegnanti della regione Emilia-Romagna coordinato dal prof. Achille Maffini ha cercato di esplorare i possibili esiti di questo processo di riforma, concentrandosi su quattro livelli di analisi.

Il primo è quello della struttura della prova. La prova attuale comprende problemi (articolati in domande) e quesiti, e prevede la possibilità di scelta da parte degli studenti (negli ultimi anni, lo studente doveva scegliere un problema tra due, e cinque quesiti tra dieci proposti). La discussione e lo studio comparativo (con altri sistemi scolastici) ha portato a mettere a fuoco le opportunità offerte e i problemi creati (anche in sede di valutazione) dalla possibilità di scelta degli studenti. Sono state inoltre esaminate diverse tipologie di consegne, anche esaminando le prove finali di matematica proposte in altre nazioni e le prove di valutazione degli apprendimenti e delle competenze delle indagini internazionali IEA-TIMSS advanced e OCSE-Pisa.

Il secondo piano di analisi ha riguardato i contenuti. Le Indicazioni Nazionali introducono molte novità, a questo proposito, riducendo l'importanza di alcuni argomenti tradizionali e mettendo al centro del curriculum alcune nuove parole chiave (tanto per citarne una, *modello*). Vi sono inseriti anche nuclei di contenuti completamente nuovi, almeno per il liceo di ordinamento, come ad esempio la geometria analitica dello spazio. Per questi contenuti non esiste una prassi cui rifarsi per valutare gli obiettivi posti dalle Indicazioni, non esiste un *corpus* di esercizi standard, e neppure un *syllabus* di contenuti validato dall'esperienza. Il gruppo ha lavorato esaminando i libri di testo (pre e post riforma), i materiali delle indagini internazionali e delle prove d'esame di altri paesi, le esperienze precedenti dei partecipanti al gruppo di lavoro, i vari *Syllabi* proposti da organizzazioni come l'*Unione Matematica Italiana* o la *Mathesis*.

Il terzo livello in qualche modo inglobava in sé anche elementi per i precedenti. La questione era infatti generale: come disegnare (se possibile) una prova che permetta di valutare i risultati di uno studente nell'ottica delle competenze così come individuate dalle Indicazioni Nazionali. Il gruppo ha quindi esaminato le Indicazioni, nelle loro parti generali, e i Quadri di Riferimento delle indagini nazionali e internazionali nei quali è presente una definizione di *competenza matematica*.

Il quarto piano di analisi ha riguardato gli altri elementi di novità delle Indicazioni, vale a dire la

questione di come una prova scritta al termine del percorso possa inglobare e valutare elementi ritenuti fondamentali, quali ad esempio l'interdisciplinarietà (con la Fisica e con le Scienze) e la coerenza verticale del curriculum.

Il lavoro dei diversi gruppi si è concretizzato nelle proposte che sono qui raccolte. In particolare, segnaliamo la ricerca di convergenza su un *Syllabus* e la considerevole mole di *esempi* di possibili prove d'esame, articolate su diversi formati, contenuti e difficoltà.

Questo lavoro viene ora messo a disposizione di tutti gli insegnanti e dei decisori, nella speranza di rendere un efficace servizio al processo di cambiamento innescato dalla riforma dei cicli.

Aspetti organizzativi

Responsabile: Prof. Maffini Achille, Liceo Scientifico Ulivi di Parma.

Responsabile scientifico: Prof. Bolondi Giorgio, Università degli Studi di Bologna.

Docenti partecipanti

A vario titolo e con diverse frequenze hanno partecipato in totale 84 insegnanti liceali di tutta l'Emilia Romagna. Hanno inoltre ricevuto comunicazioni (su richiesta) insegnanti anche di altre regioni, o non direttamente partecipanti, per un coinvolgimento complessivo di circa 90 insegnanti.

Risultati ottenuti:

- Possibilità di confronto fra insegnanti di realtà scolastiche diverse.
- Analisi dei sistemi di valutazioni internazionali e del ruolo della valutazione alla fine di un percorso di matematica.
- Analisi delle prove di valutazioni in relazione alle finalità delle Indicazioni Nazionali.
- Confronto su programmazioni e sulla strutturazione del curriculum del triennio del liceo scientifico e del liceo delle scienze applicate
- Analisi dei vari Syllabus presenti (UMI, Mathesis) nel tentativo di arrivare ad un Syllabus condiviso.
- Costruzione di quesiti proponibili per una prova d'Esame strutturata sulla base di tre quesiti obbligatori e di tre quesiti a scelta. La proposta finale consta di 71 quesiti suddivisi tra i vari nuclei tematici del quinto anno (e non solo).

Tra i risultati ottenuti, da segnalare come la possibilità di confronto e della costruzione di una rete di colleghi con cui relazionarsi è da stato ritenuto uno dei più significativi e importanti.

Incontri

- Incontri regionali a Parma (province coinvolte: Piacenza, Parma, Reggio Emilia, Modena) e a Bologna (province coinvolte: Bologna, Ferrara, Ravenna, Cesena e Forlì, Rimini): 2 nell'A.S. 2013/14 e uno nell'A.S. 2014/15
- 2 Incontri interprovinciali coordinati da un responsabile provinciale:
 - o Piacenza, Parma (Prof. Maffini Achille)
 - o Reggio Emilia, Modena (Prof.ssa Tedeschi Carla)
 - o Ferrara (Prof. Bonomo Stefano)
 - o Bologna, Ravenna, Cesena e Forlì, Rimini (Prof.ssa Ragagni Maria e Prof. Massa Claudio)

ALLEGATI

(A) Progetto

(B) Relazione Prof. Bolondi Parma e Bologna marzo 2014

Reperibile all'indirizzo

http://www.liceoulivi.it/pvw/app/PRLS0002/pvw_sito.php?sede_codice=PRLS0002&from=4&page=1431

(percorso: www.liceoulivi.it / Docenti e ATA /Progetto Esame di Stato / Matematica)

(C) Scaletta lavori interprovinciali (1)

(D) Prove TIMMS Advanced

Reperibile all'indirizzo

http://www.liceoulivi.it/pvw/app/PRLS0002/pvw_sito.php?sede_codice=PRLS0002&from=4&page=1431

(percorso: www.liceoulivi.it / Docenti e ATA /Progetto Esame di Stato / Matematica)

(E) Prove Esame di Stato Svizzera

Reperibile all'indirizzo

http://www.liceoulivi.it/pvw/app/PRLS0002/pvw_sito.php?sede_codice=PRLS0002&from=4&page=1431

(percorso: www.liceoulivi.it / Docenti e ATA /Progetto Esame di Stato / Matematica)

(F) Prove d'ingresso Facoltà Scientifiche

Reperibile all'indirizzo

http://www.liceoulivi.it/pvw/app/PRLS0002/pvw_sito.php?sede_codice=PRLS0002&from=4&page=1431

(percorso: www.liceoulivi.it / Docenti e ATA /Progetto Esame di Stato / Matematica)

(G) Report Bologna aprile 2014

(H) Report Ferrara aprile 2014

(I) Report Parma aprile 2014

(J) Report Reggio Emilia aprile 2014

(K) Proposte di lavoro per settembre-ottobre

(L) Report Ferrara settembre 2014

(M) Report Parma settembre 2014

(N) Report Reggio settembre 2014

(O) Scaletta incontri plenari ottobre 2014

(P) Sintesi incontri plenari ottobre 2014

(Q) Proposte quesiti definitivi suddivisi per argomento

Allegato A

Adeguamento dell'organizzazione e dello svolgimento degli Esami di Stato alle modifiche introdotte con il riordino di cui ai DD.PP.RR. 87, 88, 89 del 2010 MATEMATICA

Premessa. Le Indicazioni Nazionali susseguenti al recente riordino della scuola secondaria di secondo grado, hanno lasciato alle scuole e ai docenti ampi margini di discrezionalità sull'impostazione della programmazione e del curriculum di matematica. Questo ha comportato non poco disorientamento nei docenti, relativamente, soprattutto, all'organizzazione, svolgimento e valutazione della prova di Matematica.

1. CRITICITA' E BISOGNI: ESAME COME SINTESI E COMPLETAMENTO DEL PERCORSO O PERCORSO IN FUNZIONE DELL'ESAME?

Obiettivi

Le Indicazioni Nazionali relative ai Nuovi Ordinamenti liceali dovrebbero presupporre un nuovo Esame di Stato visto come completamento del nuovo percorso. Ad oggi non è dato sapere su cosa saranno valutati gli studenti al termine del percorso liceale e quali competenze saranno richieste.

Un lavoro sull'Esame di Stato, quindi, non può prescindere da una riflessione sui curricula, sia in termini di contenuti che di obiettivi specifici. In particolare, un ruolo privilegiato, in tale riflessione, dovrà essere assunto dal concetto di competenza (sia disciplinare che interdisciplinare).

Nei punti seguenti si fisseranno, in maniera più specifica, le tappe per arrivare a tali obiettivi.

A. Relazione tra contenuti e metodologia, tra contenuti e aspetti formativi

Quale curriculum dalle Indicazioni Nazionali? Confronto fra le esperienze e le scelte didattico-contenutistiche. Individuazione dei nuclei fondanti del curriculum:

- quali caratteristiche per un curriculum liceale?
- su quale concetto di competenza e di 'realtà matematica' va strutturato?
- quali approcci metodologici utilizzare e quali i più efficaci?

B. L'Esame di Stato

B1. Analisi dei questionari degli insegnanti relative agli Esami di Stato degli ultimi anni (documentazione Matmedia)

B2. Analisi delle peculiarità delle singole prove.

B3. Analisi delle prove di matematica degli ultimi anni per vedere quali e in che misura sono ritenute coerenti con le nuove Indicazioni Nazionali

B4. Analisi delle specificità delle singole prove; verso il concetto di competenza? Di riflesso: analisi del concetto di competenza matematica.

B5. Analisi delle principali caratteristiche di una prova di valutazione di un percorso liceale.

B6. Come valutare una prova Nazionale? Le modalità di valutazione di competenze disciplinari.

B7. Le prove di valutazione e le competenze richieste per gli studi universitari: confronti e raffronti.

2. INDICAZIONI OPERATIVE

Gli incontri saranno di due tipologie: in plenaria (interprovinciali) e locali (provinciali).

A. Schema degli incontri in plenaria

- Intervento di un esperto sulla tematica centrale dell'incontro.
- Dibattito e confronto sulle tematiche proposte.
- Affidamento delle consegne di lavoro per i gruppi locali.
- Costituzione, durante il primo incontro, di sottogruppi locali con definizione di un coordinatore locale.

B. Schema degli incontri locali

- Confronto di esperienze: socializzazione delle scelte proposte dai Dipartimenti delle scuole coinvolte.
- Attività specifiche sulle consegne di lavoro.
- Sintesi delle attività svolte.

C. Calendario incontri

Marzo 2014. Primo incontro in plenaria (uno a Bologna e uno a Parma)

Marzo-Aprile 2014. Incontri locali per lavori di gruppo.

Maggio 2014. Secondo incontro in plenaria: sintesi di quanto emerso e rilanci successivi.

Settembre 2014. Seconda fase incontri locali per lavori di gruppo.

Settembre-ottobre 2014. Incontro conclusivo in plenaria e pubblicazione sul web della sintesi finale e dei materiali elaborati dai gruppi

3. PRODOTTI ATTESI

- a. Riflessione sull'insegnamento della matematica nell'attuale realtà liceale.
- b. Pubblicazione on line di materiali didattici.
- c. Pubblicazione di una proposta organica di lavoro sulla matematica nel quinquennio.
- d. Proposte per la tipologia di prove da somministrare nelle prove dell'Esame di Stato.
- e. Ipotesi di strutturazione di un syllabus coerente con le Indicazioni Nazionali.

4. ASPETTI ORGANIZZATIVI

Incontri in plenaria

Relatore e coordinatore: **Prof. Bolondi Giorgio dell'Università degli Studi di Bologna**

Sedi: **Parma** (per le provincie di Piacenza, Parma, Reggio Emilia, Modena)

Bologna (per le provincie di Bologna, Ferrara, Forlì-Cesena, Ravenna, Rimini)

Date del primo incontro in plenaria:

Parma: mercoledì 19/3/14 ore 15-18 - Liceo Scientifico Ulivi

Bologna: giovedì 20/3/14 ore 15.30-18.30 - Dipartimento di Matematica

Di ogni scuola aderente potrà partecipare **un solo** insegnante.

In base alle adesioni, sarà successivamente inviato un programma dettagliato degli incontri.

Argomenti del primo incontro in plenaria

L'incontro sarà dedicato a delineare il quadro di riferimento entro il quale sono state scritte le Indicazioni Nazionali per il sistema dei Licei, e in particolare la parte di Matematica per i licei scientifici. L'obiettivo è di mettere a fuoco quale matematica è prevista nei nuovi percorsi liceali (soprattutto nel triennio) con particolare riguardo sia ai contenuti sia al significato più ampio (in relazione alla fisica, alle scienze e ad altre discipline) di questi contenuti. Sarà inoltre esaminato il tema di come possibili cambiamenti di struttura della prova possano avere conseguenze sulla pratica scolastica (prove di valutazione interne, esercizi assegnati a casa....).

Sarà anche discusso il confronto tra le domande presenti nelle ultime prove e le Indicazioni Nazionali. Ai gruppi di lavoro che verranno attivati dopo l'incontro sarà dato, tra gli altri, anche il compito di confrontare queste domande con i percorsi che effettivamente sono stati proposti ai ragazzi della Riforma.

Scuola polo e Responsabile del progetto

Scuola polo: Liceo Scientifico G. Ulivi - Parma

Responsabile del Progetto: Prof. Maffini Achille – Liceo Scientifico G. Ulivi (Parma).

e-mail: achille.maffini@istruzione.it

Iscrizione

Le scuole che intendono aderire al progetto devono inviare una mail all'indirizzo achille.maffini@istruzione.it indicando in oggetto la dicitura 'Progetto Esame di Stato'

Nella mail dovranno essere indicati:

- Nome, tipologia e riferimenti della scuola
- Nome e indirizzo mail dell'insegnante delegato.

Allegato C

LAVORI DEI GRUPPI INTERPROVINCIALI

1) Ogni gruppo lavora su un insieme omogeneo di materiali, scelto tra i seguenti:

a) Compiti della prova scritta dell'esame di Stato per i Licei Scientifici di Ordinamento (degli ultimi 10 anni, indicativamente)

reperibili in rete, ad esempio sul sito <http://online.scuola.zanichelli.it/provamatematica/>

b) Compiti della prova scritta dell'esame di Stato per i Licei Scientifici PNI-Sperimentali (degli ultimi 10 anni, indicativamente)

reperibili in rete, ad esempio sul sito <http://online.scuola.zanichelli.it/provamatematica>

c) Domande TIMSS Advanced

nel file di documentazione fornito ai partecipanti

d) Domande somministrate in prove analoghe di altri paesi, ad esempio

d1- Prove di matematica della maturità federale svizzera

reperibili in rete previa registrazione attraverso il sito

<http://www.sbf.admin.ch/themen/01366/01720/index.html?lang=it>

d2 – Prove del Baccalaureat francese

reperibili in rete, ad esempio sul sito

<http://www.maths-france.fr/Terminale/TerminaleS/ProblemesBac/index.php>

e) Test di ammissione alle Facoltà di Scienze

reperibili in rete all'indirizzo <http://www.testingressoscienze.org/syllabi.html>

f) Esercizi proposti da un libro di testo in uso

2) Il gruppo seleziona, tra queste prove, delle domande che ritiene adatte a valutare le competenze matematiche al termine del percorso della riforma. Le domande avranno formati e lunghezze molto differenti, come è naturale; d'altra parte non sappiamo ancora che formato potranno avere le consegne della futura prova dell'esame di Stato (problemi: quesiti? Grappoli di quesiti su una stessa situazione?).

3) Per ogni domanda, il gruppo redige una breve scheda in cui

- individua i nuclei di contenuti che possono venire valutati attraverso quella domanda e li aggancia ai punti delle Indicazioni Nazionali corrispondenti
- confronta il quesito con la prassi scolastica pre-riforma e con l'esperienza di questi ultimi due anni
- confronta il quesito con quanto presente nei libri di testo
- indica i prerequisiti necessari, acquisiti dal ragazzo negli anni precedenti
- propone eventuale modifiche

FORMATO RESTITUZIONE

Quesito *(dare un titolo o una sigla)*

(inserire il testo o l'immagine del quesito)

Origine del quesito: _____
(es.: libro NN, es. X pag. Y; oppure Esame di Stato ordinamento, anno NNNN quesito X. Indicare se è nella versione originale o se è stata modificata o tradotta) _____

Nuclei di contenuti coinvolti: _____

Question Intent: _____

(si intende “che cosa vuole valutare questo quesito”)

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali: _____

(citare i passi delle Indicazioni Nazionali cui è possibile agganciare questo quesito)

Prerequisiti necessari: _____

(esplicitare i contenuti degli anni precedenti particolarmente necessari per poter rispondere a questo quesito)

Analogie/differenze con gli esercizi sugli stessi contenuti presenti nei libri di testo: _____

Coerenza/distanza con i percorsi realizzati effettivamente nelle classi della riforma fino a questo momento: _____

Eventuali modifiche per renderlo in una forma effettivamente proponibile in sede di prova scritta di esame di Stato, coerente con le Indicazioni Nazionali: _____

Stima della difficoltà: _____
(Indicare un valore da 1 a 5: 1 difficoltà minima, 5 difficoltà massima)

Allegato G

Corso di formazione sull'Esame di Stato

Bologna, Ravenna, Cesena-Forlì, Rimini

Coordinatori: Prof.ssa Ragagni Maria, Prof. Massa Claudio

Martedì 14/04/2014, 15.00-18.00

Nel lavoro di gruppo si sono analizzati gli obiettivi specifici di apprendimento presenti nelle indicazioni nazionali allo scopo di individuare **gli argomenti da affrontare** nelle terza e nella quarta classe, confrontandoli con **gli argomenti effettivamente trattati** nelle classi che stanno frequentando il quarto anno del Liceo riformato.

Sono emerse alcune **incongruenze** tra: gli obiettivi specifici introdotti nelle **Indicazioni Nazionali**, gli argomenti presenti sui **libri adottati**, le **scelte** fatte dai dipartimenti di matematica delle diverse scuole e gli argomenti che le **quattro ore** settimanali di matematica hanno **permesso effettivamente di trattare**.

Ecco l'analisi dettagliata degli obiettivi specifici delle Indicazioni nazionali corredate di un cenno alle considerazioni emerse nella discussione.

| OBIETTIVI SPECIFICI | CLASSE | PROBLEMATICHE e COMMENTI |
|--|---------------|---|
| Lo studio della circonferenza e del cerchio, del numero π , e di contesti in cui compaiono crescite esponenziali con il numero e , permetteranno di approfondire la conoscenza dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti. In questa occasione lo studente studierà la formalizzazione dei numeri reali anche come introduzione alla problematica dell'infinito matematico (e alle sue connessioni con il pensiero filosofico). Sarà anche affrontato il tema del calcolo approssimato, sia dal punto di vista teorico sia mediante l'uso di strumenti di calcolo. | Classe terza | 1) Le proprietà della circonferenza e del cerchio sono studiate nel biennio 2) Si parla dell'introduzione dei numeri reali con le sezioni di Dedekind? 3) Si fa riferimento a Cantor e alla teoria degli insiemi infiniti? 4) A questo capitolo appartengono le equazioni e le disequazioni irrazionali e con i valori assoluti. Si ricorda che la funzione valore assoluto non viene più introdotta al biennio. |
| Saranno studiate la definizione e le proprietà di calcolo dei numeri complessi, nella forma algebrica, geometrica e trigonometrica. | Classe quarta | |
| Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico. Inoltre, lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria. Studierà le proprietà della circonferenza e del cerchio e il problema della determinazione dell'area del cerchio, nonché la nozione di | Classe terza | |

| | | |
|--|------------------------------|---|
| luogo geometrico, con alcuni esempi significativi. | | |
| Lo studio della geometria proseguirà con l'estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana, anche al fine di sviluppare l' intuizione geometrica. In particolare, saranno studiate le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità, nonché le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione). | Classe quarta | |
| Un tema di studio sarà il problema del numero delle soluzioni delle equazioni polinomiali. | Classe quarta | Teorema fondamentale dell'algebra introdotto nell'ambito dei numeri complessi? |
| Lo studente acquisirà la conoscenza di semplici esempi di successioni numeriche, anche definite per ricorrenza, e saprà trattare situazioni in cui si presentano progressioni aritmetiche e geometriche. | Classe terza | |
| Approfondirà lo studio delle funzioni elementari dell' analisi e, in particolare, delle funzioni esponenziale e logaritmo. Sarà in grado di costruire semplici modelli di crescita o decrescita esponenziale, nonché di andamenti periodici, anche in rapporto con lo studio delle altre discipline; tutto ciò sia in un contesto discreto sia continuo. | Classe terza o classe quarta | <p>1) Funzioni esponenziali e logaritmi possono essere affrontati in terza o in quarta: ogni scuola ha fatto scelte diverse, anche in relazione al libro di testo adottato.</p> <p>2) Qui si accenna ad "andamenti periodici", richiamando le funzioni goniometriche, le quali, però, vengono citate esplicitamente solo nel biennio (vedere oltre)</p> |
| Infine, lo studente apprenderà ad analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e saprà operare su funzioni composte e inverse. Un tema importante di studio sarà il concetto di velocità di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione. | Terza e quarta | Resta il problema della goniometria e delle funzioni goniometriche |
| Lo studente, in ambiti via via più complessi, il cui studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con le altre discipline e in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti, apprenderà a far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, | Forse terza? | Pur essendo tutti consapevoli dell'importanza dell'argomento, in nessuna delle scuole rappresentate i docenti sono riusciti a inserire la statistica nei programmi svolti |

| | | |
|---|-----------------|--|
| dipendenza, correlazione e regressione, e di campione. | | |
| Studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio. | Classe quarta | |
| In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico. | Tutte le classi | |

TEMATICHE EFFETTIVAMENTE AFFRONTATE:

Durante la discussione sono emerse alcune scelte effettuate dai dipartimenti delle diverse scuole, anche in relazione ai libri di testo adottati. Ecco alcuni esempi:

1

classe terza: Disequazioni, funzioni, geometria analitica, goniometria

classe quarta: trigonometria, funzioni esponenziali e logaritmi, calcolo combinatorio e probabilità, geometria dello spazio

2

classe terza: Disequazioni, funzioni, geometria analitica, funzioni esponenziali e logaritmi

classe quarta: goniometria e trigonometria, , calcolo combinatorio e probabilità, geometria dello spazio, trasformazioni del piano

3

classe terza: Disequazioni, funzioni, geometria analitica, trasformazioni del piano

classe quarta: goniometria e trigonometria, funzioni esponenziali e logaritmi, calcolo combinatorio e probabilità, geometria dello spazio

Durante il confronto tra le varie scelte si sono individuate le tematiche che hanno creato più argomenti di discussione:

- 1) Il fatto che la goniometria e la trigonometria non si possono non trattare eppure le indicazioni nazionali non le prevedono (si limitano a qualche suggestione). Anche limitandosi a “casi semplici” il tempo necessario ai ragazzi per prendere confidenza con l'algebra delle funzioni goniometriche è significativo.
- 2) Il fatto che la statistica (distribuzioni doppie condizionate e marginali, concetti di dipendenza, correlazione e regressione, e di campione) non è stata, di fatto, introdotta in quasi nessuna scuola.
- 3) Il fatto che le indicazioni non citino esplicitamente le trasformazioni del piano (le affinità in generale) mentre nel programma PNI erano ritenute estremamente significative.
- 4) Il fatto che l'ammonizione: “pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità” non si accorda con la varietà di obiettivi fissati e con il tempo a disposizione.
- 5) Il dubbio se gli obiettivi proposti dalle indicazioni siano tutti da affrontare o se i docenti possono effettuare delle scelte, sia nell'ambito degli argomenti trattati sia nell'ambito del livello di approfondimento raggiunto.

La conclusione raggiunta durante la discussione è che sono necessari al più presto un syllabus e degli esempi di prove per preparare i ragazzi all'esame di stato.

Allegato H

Corso di formazione sull'Esame di Stato

Ferrara – Coordinatore Prof. Bonato Stefano

Venerdì 11/04/2014, 15.00-18.00

Proposta di un Syllabus di matematica per i Licei Scientifici (nuovo ordinamento)

Premessa

Il gruppo ha condiviso una proposta di un Syllabus di argomenti rilevanti per la prova scritta di matematica dell'Esame di Stato del Liceo scientifico alla luce delle Indicazioni Nazionali.

Nella redazione della proposta oltre a far riferimento alle Indicazioni nazionali sono state tenute presenti anche prassi didattiche consolidate e coerenti con le Indicazioni stesse.

Il Syllabus si riferisce alle conoscenze e abilità relative all'ultimo anno di corso.

SYLLABUS di MATEMATICA per i LICEI SCIENTIFICI Quinto anno

Geometria

- Coordinate cartesiane nello spazio
- Distanza tra due punti nello spazio
- Equazioni cartesiane di un piano e di una retta nello spazio
- Mutue posizioni fra due piani e fra un piano e una retta nello spazio: condizioni di parallelismo, incidenza, perpendicolarità
- Equazione di una sfera

Relazioni e funzioni

- Limiti di successioni e funzioni a valori in \mathbb{R}
- Proprietà dei limiti: l'unicità del limite e la "permanenza del segno"
- Teorema del confronto (o "dei carabinieri")
- Limite della somma, del prodotto e del quoziente (se ha senso) di due funzioni; limite della composizione e dell'inversa (se esiste)
- Successioni e funzioni crescenti o decrescenti e loro limiti
- Definizione e approssimazioni dei numeri π ed e
- Esempi notevoli di limiti di successioni e di funzioni, in particolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\beta} = +\infty, \text{ per } a > 1, \beta > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\beta} = 0, \text{ per } a > 1, \beta > 0$$

- Velocità media (e istantanea) di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione, e interpretato anche graficamente.
- Continuità e derivabilità di una funzione in un punto e in un intervallo. Esempi di funzioni non continue o non derivabili. Relazione fra derivabilità e continuità di una funzione in un punto.
- Esempi di calcolo della derivata di una funzione in un punto come limite del rapporto incrementale. La funzione derivata. Derivate di ordine superiore
- Teorema degli zeri per le funzioni continue.
- Esempi di funzioni continue e derivabili quante volte si vuole: funzioni polinomiali, logaritmo, esponenziale, funzioni trigonometriche. Caratterizzazione della funzione e^x tra le funzioni a^x come quella con derivata 1 in $x=0$
- Interpretazioni geometriche e fisiche della derivata. Retta tangente al grafico di una funzione in un punto. La velocità come derivata dello spazio percorso in funzione del tempo
- Derivata della somma, del prodotto, del quoziente (se ha senso), della composizione di due funzioni derivabili. Derivata dell'inversa (se esiste) di una funzione derivabile
- Formule per le derivate delle funzioni elementari x^n , $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x , $\ln x$ e, in intervalli di invertibilità, delle loro inverse
- Differenziale di una funzione e suo significato geometrico (linearizzazione della funzione nell'intorno di un punto)
- Teorema del valor medio di Lagrange e teorema di Rolle
- Relazioni fra la monotonia di una funzione derivabile e il segno della sua derivata
- Teorema di De L'Hôpital
- Andamento qualitativo del grafico della derivata noto il grafico di una funzione e viceversa
- Comportamento della derivata di una funzione nei punti di massimo e minimo relativo
- Risoluzione di problemi che richiedono di determinare massimo o minimo di grandezze rappresentabili mediante funzioni derivabili di variabile reale
- Comportamento della derivata seconda e informazione sui punti di flesso, di convessità e concavità del grafico di una funzione. Punti critici
- Tracciamento del grafico di una funzione. Asintoti
- Calcolo di una radice approssimata di un'equazione algebrica con il metodo di bisezione e con il metodo delle tangenti (di Newton)
- Nozione di integrale definito di una funzione in un intervallo. Esempi di stima del suo valore mediante un processo di approssimazione basato sulla definizione, con il metodo dei rettangoli, con il metodo dei trapezi
- Interpretazione dell'integrale definito di una funzione come area con segno dell'insieme di punti del piano compreso fra il suo grafico e l'asse delle ascisse
- Teorema della media integrale e suo significato geometrico
- Lunghezza della circonferenza, area del cerchio
- Espressione per mezzo di integrali dell'area di insiemi di punti del piano compresi tra due grafici di funzione
- Principio di Cavalieri e sue applicazioni per il calcolo di volumi di solidi e di aree di superficie (prisma, parallelepipedo, piramide, solidi di rotazione: cilindro, cono e sfera)
- Calcolo del volume di solidi (ad es. di rotazione) come integrale delle aree delle sezioni effettuate con piani ortogonali a una direzione fissata
- Primitiva di una funzione e nozione d'integrale indefinito
- Primitive delle funzioni elementari

- Teorema fondamentale del calcolo integrale. Calcolo di un integrale definito di una funzione di cui si conosce una primitiva
- Primitive delle funzioni polinomiali intere e di alcune funzioni razionali
- Integrazione per sostituzione e per parti
- Concetto di equazione differenziale e sua utilizzazione per la descrizione e modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura

Dati e previsioni

- Alcune distribuzioni discrete di probabilità: distribuzione binomiale, distribuzione di Poisson e loro applicazioni
- Variazione delle distribuzioni binomiale e di Poisson al variare dei loro parametri
- Variabili aleatorie continue e loro distribuzioni: distribuzione normale e sue applicazioni
- Operazione di standardizzazione: sua importanza nel confronto e studio di distribuzioni statistiche e di probabilità e per l'utilizzo in modo corretto delle tavole della distribuzione normale standardizzata (della densità e della funzione di ripartizione)
- Definizione e interpretazione di valore atteso, varianza e deviazione standard di una variabile aleatoria

APPENDICE

INDICAZIONI NAZIONALI (DM N.21/2010)

MATEMATICA

LINEE GENERALI E COMPETENZE¹

Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del mondo fisico. Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale. Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica. Di qui i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio:

- 1) gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);
- 2) gli elementi del calcolo algebrico, gli elementi della geometria analitica cartesiana, una buona conoscenza delle funzioni elementari dell'analisi, le nozioni elementari del calcolo differenziale e integrale;
- 3) gli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici, con particolare riguardo al calcolo vettoriale e alle equazioni differenziali, in particolare l'equazione di Newton e le sue applicazioni elementari;
- 4) la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica [*la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità, dell'analisi statistica e della ricerca operativa*];
- 5) il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci);
- 6) costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo;
- 7) una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica;
- 8) una conoscenza del principio d'induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara del significato filosofico di questo principio ("invarianza delle leggi del pensiero"), della sua diversità con l'induzione fisica ("invarianza delle leggi dei fenomeni") e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico.

Quest'articolazione di temi e di approcci costituirà la base per istituire collegamenti e confronti concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica, le scienze naturali e sociali [*Questa articolazione di temi e di approcci costituirà la base per istituire collegamenti e confronti*

¹ In corsivo fra parentesi quadre le modifiche presenti nell'opzione Scienze applicate.

concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica, le scienze naturali, sociali ed economiche, la filosofia, la storia e per approfondire il ruolo della matematica nella tecnologia].

Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi, anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo. Tali capacità operative saranno particolarmente accentuate nel percorso del liceo scientifico, con particolare riguardo per la padronanza del calcolo infinitesimale e di metodi probabilistici di base [*Tali capacità saranno più accentuate nel percorso del liceo scientifico (opzione “scienze applicate”), con particolare riguardo per la padronanza del calcolo infinitesimale, del calcolo della probabilità, degli elementi della ricerca operativa, dei concetti e delle tecniche dell’ottimizzazione. Inoltre, lo studente avrà sviluppato una specifica conoscenza del ruolo della matematica nella tecnologia e nelle scienze dell’ingegneria*].

Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L’insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico.

Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l’uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. L’uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l’illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale. [*L’uso degli strumenti informatici è una risorsa di particolare importanza in questo liceo. Essa sarà comunque introdotta in modo critico, senza creare l’illusione che sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale*].

L’ampio spettro dei contenuti che saranno affrontati dallo studente richiederà che l’insegnante sia consapevole della necessità di un buon impiego del tempo disponibile. Ferma restando l’importanza dell’acquisizione delle tecniche, verranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi.

L’approfondimento degli aspetti tecnici, sebbene maggiore nel liceo scientifico che in altri licei, non perderà mai di vista l’obiettivo della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina. [*L’approfondimento degli aspetti tecnologici e ingegneristici, sebbene più marcato in questo indirizzo, non perderà mai di vista l’obiettivo della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina*]. L’indicazione principale è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità.

OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO

Quinto anno

Nell’anno finale lo studente approfondirà la comprensione del metodo assiomatico e la sua utilità concettuale e metodologica anche dal punto di vista della modellizzazione matematica. Gli esempi verranno tratti dal contesto dell’aritmetica, della geometria euclidea o della probabilità ma è lasciata alla scelta dell’insegnante la decisione di quale settore disciplinare privilegiare allo scopo.

Geometria

L’introduzione delle coordinate cartesiane nello spazio permetterà allo studente di studiare dal punto di vista analitico rette, piani e sfere.

Relazioni e funzioni

Lo studente proseguirà lo studio delle funzioni fondamentali dell’analisi anche attraverso esempi

tratti dalla fisica o da altre discipline. Acquisirà il concetto di limite di una successione e di una funzione e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici.

Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale - in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità - anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva, calcolo di aree e volumi). Non sarà richiesto un particolare addestramento alle tecniche del calcolo, che si limiterà alla capacità di derivare le funzioni già note, semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, le funzioni razionali e alla capacità di integrare funzioni polinomiali intere e altre funzioni elementari, nonché a determinare aree e volumi in casi semplici. Altro importante tema di studio sarà il concetto di equazione differenziale, cosa si intenda con le sue soluzioni e le loro principali proprietà, nonché alcuni esempi importanti e significativi di equazioni differenziali, con particolare riguardo per l'equazione della dinamica di Newton. Si tratterà soprattutto di comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura. Inoltre, lo studente acquisirà familiarità con l'idea generale di ottimizzazione e con le sue applicazioni in numerosi ambiti.

Dati e previsioni

Lo studente apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson). In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi [*In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi in particolare nell'ambito delle scienze applicate, tecnologiche e ingegneristiche*].

Analisi delle prove PNI

Controllato i vecchi esami di stato 2001-2012, abbiamo riscontrato che i problemi/quesiti di analisi degli ultimi anni sono tutti in linea con le richieste del quinto anno di corso liceale e sono una buona base per l'ingresso all'università (sarebbe però auspicabile evitare riferimenti a cose fatte in prima o in seconda e restare tra quarta e quinta). Quindi la parte fondamentale (obbligatoria) dell'esame dovrebbe essere proprio questa, un problema di analisi tipo quelli proposti negli ultimi anni (vedi esempi riportati nell'allegato 1). Gli altri argomenti del syllabus condiviso dovrebbero essere messi negli approfondimenti (parte opzionale), lasciando margine di scelta ai docenti e permettendo agli studenti di scegliere secondo il programma effettivamente svolto, questo perché abbiamo già visto che più di tanto non si riesce a fare ed è pura utopia sperare di fare tutto quello che viene richiesto.

Analizzando le prove più in dettaglio si possono evidenziare delle richieste divenute, oramai, “classiche”:

- Problemi che richiedono di determinare il valore massimo o minimo di una grandezza che si può rappresentare come una funzione derivabile di una opportuna variabile
- Problemi geometrici di 1° e 2° grado dipendenti eventualmente da un parametro
- Determinazione dell'equazione della tangente al grafico di una funzione
- Applicazione dell'integrazione al calcolo delle aree e dei volumi
- Studio di funzioni e relativo diagramma cartesiano
- Calcolo del numero di soluzioni di un'equazione e approssimazione delle radici
- La determinazione della probabilità di un evento
- Calcolo del volume di solidi dei quali siano note le sezioni lungo una assegnata direzione

Relativamente ai contenuti, vogliamo porre l'accento su quelli che risultano poco trattati; in particolare:

- Calcolo della probabilità
- Statistica
- Geometria analitica dello spazio (argomento del tutto nuovo)

L'unico problema/quesito che sembra coinvolgere le competenze relative alla statistica elencate nelle Indicazioni e riportate nella proposta di syllabus è il problema 2 PNI 2004 sessione suppletiva nonché il punto 5 del problema 2 PNI 2005 sessione suppletiva e il quesito 4 PNI 2007 (vedi allegato 2).

Del tutto assenti appaiono le competenze relative geometria analitica dello spazio.

ALLEGATO 1

PNI 2011 (Prova ordinaria)

PROBLEMA 2

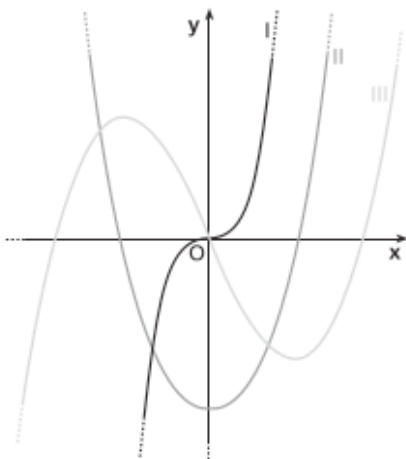
Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \quad \text{e} \quad g(x) = \sin \frac{\pi}{2} x.$$

1. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnano i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy . Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-10; 10]$ e se ne indichino le coordinate.
2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo $[0; 4]$. Si calcoli l'area di R .
3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y = -15$ e $y = -5$, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}).
4. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y , la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 5 - x$. Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

10 Nella figura sotto, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici.

Uno di essi è il grafico di una funzione f , un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f'' . Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici? Si motivi la risposta.



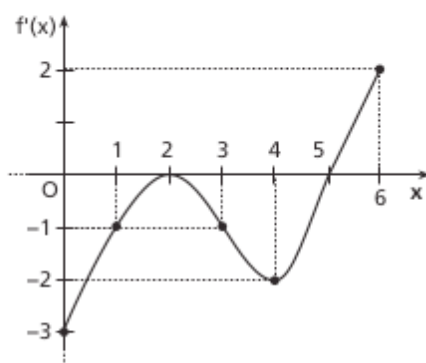
| | f | f' | f'' |
|---|-----|------|-------|
| A | I | II | III |
| B | I | III | II |
| C | II | III | I |
| D | III | II | I |
| E | III | I | II |

◀ Figura 1.

PNI 2012 (Prova ordinaria)

PROBLEMA 1

Della funzione f , definita per $0 \leq x \leq 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per $x=2$ e $x=4$. Si sa anche che $f(0)=9$, $f(3)=6$ e $f(5)=3$.



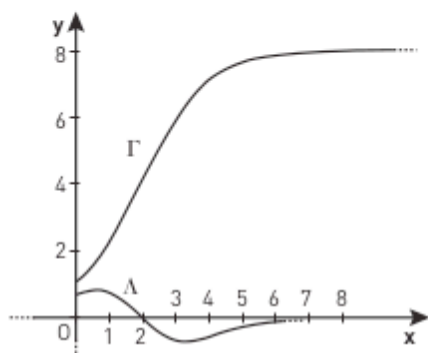
▲ Figura 1.

1. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di f motivando le risposte in modo esauriente.
2. Per quale valore di x la funzione f presenta il suo minimo assoluto? Sapendo che $\int_0^6 f'(t) dt = -5$ per quale valore di x la funzione f presenta il suo massimo assoluto?
3. Sulla base delle informazioni note, quale andamento potrebbe avere il grafico di f ?
4. Sia g la funzione definita da $g(x) = xf(x)$. Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa $x=3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano.

PNI 2013 (Prova ordinaria)

PROBLEMA 1

Una funzione $f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0; +\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici Γ e Λ di $f(x)$ e della sua derivata seconda $f''(x)$. La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate $(2; 4)$ passa per $(0; 0)$, mentre le rette $y=8$ e $y=0$ sono asintoti orizzontali per Γ e Λ , rispettivamente.



▲ Figura 1.

1. Si dimostri che la funzione $f'(x)$, ovvero la derivata prima di $f(x)$, ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni x del dominio è $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$, qual è il possibile andamento di $f'(x)$?
2. Si supponga che $f(x)$ costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che Γ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?
3. Se Γ è il grafico della funzione $f(x) = \frac{a}{1 + e^{b-x}}$, si provi che $a=8$ e $b=2$.
4. Nell'ipotesi del punto 3., si calcoli l'area della regione di piano delimitata da Λ e dall'asse x sull'intervallo $[0; 2]$.

ALLEGATO 2

PNI 2004 (Prova suppletiva)

PROBLEMA 2

Nel Liceo Scientifico «Torricelli» vi sono 4 classi quinte, i cui alunni sono distribuiti per sezione e per sesso in base alla seguente tabella:

| sezzo \ sezione | A | B | C | D |
|-----------------|----|----|----|----|
| M | 12 | 10 | 13 | 8 |
| F | 16 | 18 | 15 | 20 |

- Rappresentare graficamente la situazione per mezzo di un istogramma.
- Calcolare le distribuzioni marginali degli studenti per sezione e per sesso.
- Calcolare la probabilità che, scelta a caso una coppia di studenti della 5^a A, questa sia formata da alunni di sesso:

1) maschile 2) femminile 3) differente.

Quanto vale la somma delle tre probabilità trovate?

- Calcolare la probabilità che, scelti a caso una classe e, in essa, una coppia di studenti, questa sia formata da alunni di sesso differente.
- Scelto a caso un alunno di quinta del Liceo in questione e constatato che si tratta di uno studente di sesso maschile, calcolare la probabilità che esso provenga dalla 5^a D.

PNI 2005 (Prova suppletiva)

PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$, dove a è un parametro reale non nullo.

- Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.
- Una volta riferito il piano a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) e indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza γ di diametro OA .
- Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza γ e la curva G , quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
- Calcolare il valore \bar{a} di a per il quale la circonferenza γ e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.
- Verificare che esiste un valore a' di a per il quale la funzione $f_{a'}(x)$ si può considerare la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua e determinare la funzione di distribuzione di tale variabile.

PNI 2007 (Prova ordinaria)

- 4 Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ , σ , σ^2 e come tali parametri influenzino il grafico di $f(x)$.

Allegato I

Corso di formazione sull'Esame di Stato Parma e Piacenza – Coordinatore Prof. Maffini Achille Martedì 14/04/2014, 15.00-18.00

All'incontro di Parma hanno partecipato 11 insegnanti.

Inizialmente sono state fatte alcune considerazioni sul ruolo dell'esame e sulle competenze richieste e testabili da un esame di stato. Nella sostanza si sono ribadite le perplessità di impostazioni che tendono a relativizzare (in accordo con le Indicazioni Nazionali) alcuni argomenti ritenuti peculiari nella formazioni matematica liceale e, al contempo, dare spazio ad altri ritenuti dagli insegnanti più marginali.

Successivamente gli insegnanti si sono suddivisi in due gruppi: uno si è occupato dell'analisi e selezione delle prove TIMSS, l'altro delle prove d'ingresso alle facoltà scientifiche.

Come indicazione generale, da parte di entrambi i gruppi, sono emerse delle perplessità sul fatto che tali prove potessero essere ritenute significative per valutare conoscenze e competenze matematiche al termine di un percorso liceale; e questo anche dal punto di vista strutturale, visto che si tratta di quesiti a risposta chiusa.

Questo aspetto ha aperto una ulteriore riflessione sulla discrepanza (presunta o reale) tra le finalità che si pongono gli insegnanti liceali e le richieste che provengono dall'Università o dalle indagini internazionali. A margine ci si chiede se le problematiche legate agli esiti non siano dovute anche a questa dissociazione.

Entrando quindi nello specifico delle prove, si è comunque evidenziata l'importanza di alcune richieste, importanza che potrebbe essere probabilmente accentuata se si aumentasse la significatività delle richieste stesse. Nei casi analizzati, quindi, è stata apprezzata soprattutto la struttura e la finalità della richiesta; un po' meno l'argomento utilizzato, nei confronti del quale, in alcuni casi, sono state fatte proposte 'migliorative'.

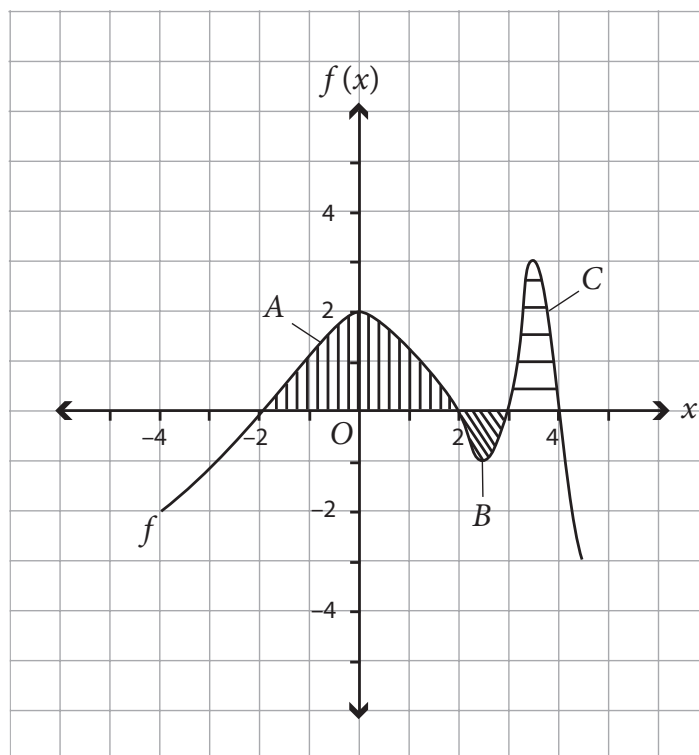
In molti casi, infine, l'analisi delle questioni proposte è servita per riflessioni didattiche o metadidattiche relative alla presentazione degli specifici argomenti.

I gruppi hanno lavorato per circa 1,5 h. L'ultima parte dell'incontro è stata dedicata alla socializzazione e al commento collegiale delle scelte fatte.

Di seguito sono riportati i quesiti selezionati. In molti casi, come detto, si ritiene auspicabile mantenere la struttura e la richiesta del quesito, a fronte però di una modifica del contenuto.

Allegato 1 – Quesiti tratti dalle prove TIMSS**Quesito MA23050**

Considera le aree tra il grafico della funzione $f(x)$ e dell'asse x in figura. Se l'area $A = 4.8$ unità, l'area $B = 0.8$ unità e l'area $C = 2$ unità,



qual è il valore dell'integrale definito $\int_{-2}^4 f(x)dx$?

- (A) 5.6
- (B) 6.0
- (C) 6.8
- (D) 7.6

Origine del quesito: TIMSS Advanced 2008

Nuclei di contenuti coinvolti: Integrale definito, area trapezoide

Question Intent: Comprensione concetto integrale definito

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali: Relazioni e funzioni (5° anno)

Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale – in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità – anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva, calcolo di aree e volumi).

Prerequisiti necessari: Calcolo con i numeri relativi, concetto di area, lettura del grafico

Analogie/differenze con gli esercizi sugli stessi contenuti presenti nei libri di testo:

Maggior numero di esercizi sul calcolo di integrale rispetto alla comprensione del concetto di integrale; tendenza ad indicare risultati espressi in forma simbolica e non decimale.

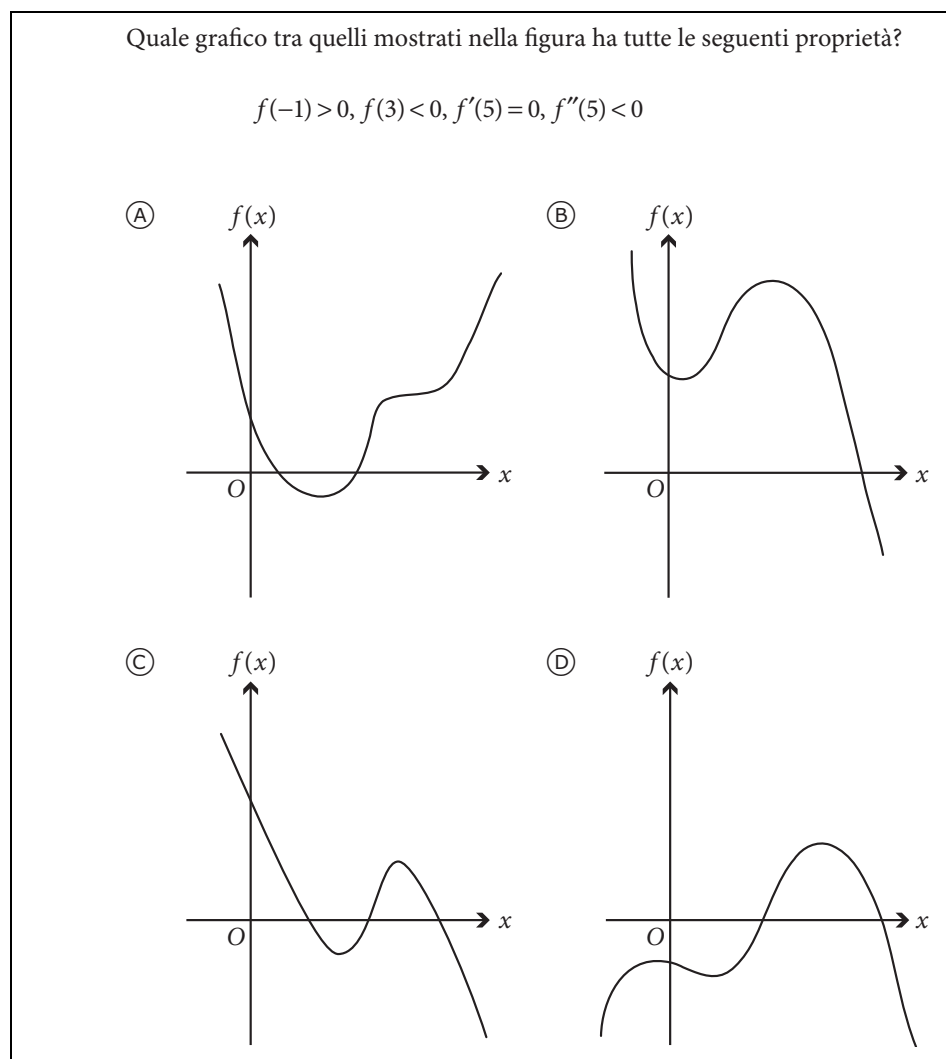
Coerenza/distanza con i percorsi realizzati effettivamente nelle classi della riforma fino a questo momento: in linea con le direttive ministeriali

Eventuali modifiche per renderlo in una forma effettivamente proponibile in sede di prova scritta di esame di Stato, coerente con le Indicazioni Nazionali: Eliminazione doppio verso assi cartesiani; non fornire valor delle singole aree, ma richiederne una valutazione approssimativa

Stima della difficoltà: 3

(Indicare un valore da 1 a 5: 1 difficoltà minima, 5 difficoltà massima)

Quesito MA23151



Origine del quesito: TIMSS Advanced 2008

Nuclei di contenuti coinvolti: Derivata in un punto, punti estremanti, concavità

Question Intent: Lettura di un grafico; significato geometrico della derivata prima

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali: Relazioni e funzioni (5° anno)

Acquisirà il concetto di limite di una successione e di una funzione e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici.

Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale

Prerequisiti necessari: Orientarsi nel piano cartesiano

Analogie/differenze con gli esercizi sugli stessi contenuti presenti nei libri di testo:

Negli attuali libri di testo la tendenza è quella di privilegiare esercizi volti a studiare una funzione con costruzione del relativo grafico.

Coerenza/distanza con i percorsi realizzati effettivamente nelle classi della riforma fino a

questo momento: piena coerenza

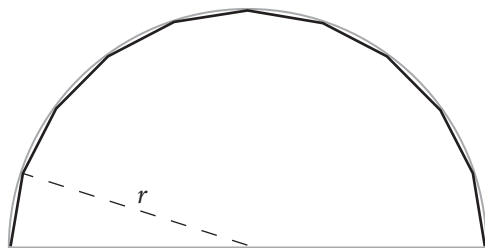
Eventuali modifiche per renderlo in una forma effettivamente proponibile in sede di prova scritta di esame di Stato, coerente con le Indicazioni Nazionali: è preferibile dare indicazioni in merito all'unità di misura scelta; si tratta di valutare se la mancanza di indicazioni sull'unità di misura sia opportuna per valutare altre competenze.

Stima della difficoltà: 3

(Indicare un valore da 1 a 5: 1 difficoltà minima, 5 difficoltà massima)

Quesito MA23021

La figura mostra una stanza semicircolare vista dall'alto.



Un architetto sta collocando 10 finestre piatte nella stanza, come mostrato. Se il raggio del cerchio è r , quale delle seguenti equazioni permetterebbe all'architetto di determinare la larghezza di ciascuna finestra?

- (A) $w = r \sin 9$
- (B) $w = 2r \sin 9$
- (C) $w = r \cos 18^\circ$
- (D) $w = 2r \sin 18$

Origine del quesito: TIMSS Advanced 2008

Nuclei di contenuti coinvolti: Relazioni e funzioni (primo biennio); funzioni circolari e trigonometria

Question Intent: La conoscenza e l'applicazione del teorema della corda

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali: Relazioni e funzioni primo biennio;

Lo studente studierà le funzioni $f(x) = |x|$, $f(x) = a/x$, le funzioni lineari a tratti, le funzioni circolari sia in un contesto strettamente matematico sia in funzione della rappresentazione e soluzione di problemi applicativi.

Prerequisiti necessari: Teoremi sulla circonferenza (relazione angolo al centro e angoli alla circonferenza), misura degli angoli (gradi sessagesimali e radianti)

Analogie/differenze con gli esercizi sugli stessi contenuti presenti nei libri di testo:

Sostanzialmente in linea con alcuni esercizi proposti dai libri di testo

Coerenza/distanza con i percorsi realizzati effettivamente nelle classi della riforma fino a questo momento: Coerente

Eventuali modifiche per renderlo in una forma effettivamente proponibile in sede di prova scritta di esame di Stato, coerente con le Indicazioni Nazionali: non fornire solo le risposte, ma richiedere il procedimento risolutivo.

Stima della difficoltà: 3

(Indicare un valore da 1 a 5: 1 difficoltà minima, 5 difficoltà massima)

Quesito MA23133

La funzione, f , è data da $f(x) = x^2 + 4$. Un'altra funzione, g , è data da $g(u) = \sqrt{2u-1}$. Determina il valore minimo di $g(f(x))$.

- (A) 0
- (B) $\sqrt{3}$
- (C) $\sqrt{\frac{7}{2}}$
- (D) $\sqrt{7}$

Origine del quesito: TIMSS Advanced 2008

Nuclei di contenuti coinvolti: Composizione di funzioni. Minimo di una funzione. Parità di una funzione. Grafico di funzioni irrazionali. Monotonia

Question Intent: Concetto di minimo e sua determinazione con metodi alternativi (geometrico, calcolo differenziale, considerazioni sulla monotonia)

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali: Concetti calcolo infinitesimale; non presenta riferimento esplicito ai max e min di una funzione.
Geometria: sezioni coniche (secondo biennio)

Prerequisiti necessari: Concetto di funzione. Derivata funzione composta. Equazione e rappresentazione iperbole.

Analogie/differenze con gli esercizi sugli stessi contenuti presenti nei libri di testo:

L'esercizio può essere svolto in modo standard (calcolo derivata) con considerazioni geometriche o relativa alle proprietà delle funzioni elementari.

Coerenza/distanza con i percorsi realizzati effettivamente nelle classi della riforma fino a questo momento: Coerente

Eventuali modifiche per renderlo in una forma effettivamente proponibile in sede di prova scritta di esame di Stato, coerente con le Indicazioni Nazionali: Sostituire la variabile indipendente u con x o modificare la richiesta finale con "valore minimo di gof ".

Stima della difficoltà: 3

(Indicare un valore da 1 a 5: 1 difficoltà minima, 5 difficoltà massima)

Allegato 2 – Quesiti tratti dalle prove di ingresso alle facoltà scientifiche

Quesito LOG

82. Sia p il logaritmo in base 10 del numero $4^{13} \cdot 5^{28}$. Quale delle seguenti è corretta?
- A. $28 < p < 29$
 - B. $29 < p < 30$
 - C. $26 < p < 27$
 - D. $27 < p < 28$
 - E. $30 < p < 31$

Origine del quesito: Test Nazionale di selezione – sett 2011

Nuclei di contenuti coinvolti: Relazioni e funzioni

Question Intent: Conoscenza funzione logaritmo, proprietà dei logaritmi e stima di un numero.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali:

Approfondirà lo studio delle funzioni elementari dell'analisi e, in particolare, delle funzioni esponenziale e logaritmo. Sarà in grado di costruire semplici modelli di crescita o decrescita esponenziale, nonché di andamenti periodici, anche in rapporto con lo studio delle altre discipline; tutto ciò sia in un contesto discreto sia continuo.

Prerequisiti necessari: Funzione logaritmo, proprietà dei logaritmi

Analogie/differenze con gli esercizi sugli stessi contenuti presenti nei libri di testo:

Tipologia di esercizio non presente nei libri di testo.

Coerenza/distanza con i percorsi realizzati effettivamente nelle classi della riforma fino a questo momento: Coerente

Eventuali modifiche per renderlo in una forma effettivamente proponibile in sede di prova scritta di esame di Stato, coerente con le Indicazioni Nazionali:

Stima della difficoltà: 5

(Indicare un valore da 1 a 5: 1 difficoltà minima, 5 difficoltà massima)

Quesito *Linguaggio matematico di base-Modellizzazione*

2. L'indice di massa corporea BMI (Body Mass Index) di un individuo è il rapporto fra il peso, espresso in kg, e il quadrato dell'altezza, espressa in metri. Io peso 80 kg e ho un BMI uguale a 30. Inoltre so che se dimagrisco di N kg, allora il mio BMI si ridurrebbe a 24. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
- A $13 < N \leq 15$
B $15 < N \leq 17$
C $17 < N \leq 19$
D $19 < N \leq 21$

Origine del quesito: Test Nazionale di selezione – sett 2011

Nuclei di contenuti coinvolti: Relazioni e funzioni

Question Intent: Capacità di modellizzare.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali:

“Comprendere il linguaggio grafico e saper utilizzare procedure tipiche del pensiero matematico”
(Obiettivi generali)

“Saper utilizzare strumenti di calcolo e rappresentazione per la modellizzazione e la risoluzione di problemi”

Prerequisiti necessari: Sistemi lineari

Analogie/differenze con gli esercizi sugli stessi contenuti presenti nei libri di testo:

Tipologia di esercizio non presente nei libri di testo.

Coerenza/distanza con i percorsi realizzati effettivamente nelle classi della riforma fino a questo momento: Coerente

Eventuali modifiche per renderlo in una forma effettivamente proponibile in sede di prova scritta di esame di Stato, coerente con le Indicazioni Nazionali:

Stima della difficoltà: 3

(Indicare un valore da 1 a 5: 1 difficoltà minima, 5 difficoltà massima)

Quesito Competenze di Base

85. Qual è l'insieme dei valori di p per i quali la disequazione

$$px^2 - 4p^2 \geq 0$$

NON ammette soluzioni?

- A. $\{p \geq 0\}$
- B. $\{p \neq 0\}$
- C. $\{p \leq 0\}$
- D. $\{p < 0\}$
- E. $\{p > 0\}$

Origine del quesito: Test Nazionali di Scienze – 7/9/2012

Nuclei di contenuti coinvolti: Relazioni e funzioni

Question Intent: Conoscenza e capacità di applicazione della risoluzione di disequazioni di secondo grado.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali:

“Lo studio delle funzioni $f(x)=ax^2+bx+c$ consentono di acquisire i concetti di soluzioni ... delle disequazioni (Relazioni e funzioni)

Prerequisiti necessari: Saper risolvere disequazioni di secondo grado

Analogie/differenze con gli esercizi sugli stessi contenuti presenti nei libri di testo:

Tipologia di esercizio presente nei libri di testo.

Coerenza/distanza con i percorsi realizzati effettivamente nelle classi della riforma fino a questo momento: Coerente

Eventuali modifiche per renderlo in una forma effettivamente proponibile in sede di prova scritta di esame di Stato, coerente con le Indicazioni Nazionali:

Riformulare la richiesta tipo *“Discuti, al variare di $p \in \mathbb{R}$, la seguente disequazione: $px^2 - 4p^2 \geq 0$ ”*

Stima della difficoltà: 3

(Indicare un valore da 1 a 5: 1 difficoltà minima, 5 difficoltà massima)

Quesito

57. Indica quale delle seguenti funzioni ha la proprietà

“per ogni coppia di numeri x_1 e x_2 del dominio, se $x_1 > x_2$ allora $f(x_1) > f(x_2)$ ”.

- A $f(x) = |x|$
- B $f(x) = \cos x$
- C $f(x) = \log_{10} x$ [*]
- D $f(x) = \frac{1}{x}$

Origine del quesito: Test Ingresso “Matematica informatica”

Nuclei di contenuti coinvolti: Relazioni e funzioni

Question Intent: Conoscenza proprietà delle funzioni elementari

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali:

Relazioni e funzioni secondo biennio

Prerequisiti necessari: Dominio, proprietà di una funzione e analisi del grafico di funzioni elementari

Analogie/differenze con gli esercizi sugli stessi contenuti presenti nei libri di testo:

Tipologia di esercizio presente nei libri di testo.

Coerenza/distanza con i percorsi realizzati effettivamente nelle classi della riforma fino a questo momento: Coerente

Eventuali modifiche per renderlo in una forma effettivamente proponibile in sede di prova scritta di esame di Stato, coerente con le Indicazioni Nazionali:

Stima della difficoltà: 3

(Indicare un valore da 1 a 5: 1 difficoltà minima, 5 difficoltà massima)

Quesito *Lucchetto*

58. Il codice per aprire un lucchetto è costituito da una sequenza di quattro cifre (da 0 a 9). Ho dimenticato il codice, ma mi ricordo che le cifre sono tutte distinte e che tra le prime tre cifre ci sono sicuramente i numeri 6 e 9. Quante sequenze di quattro numeri dovrei provare per essere certo di aprire il lucchetto?

- A 100
- B 118
- C 336 [*]
- D 600

Origine del quesito: Test Ingresso “Matematica informatica”

Nuclei di contenuti coinvolti: Dati e previsioni

Question Intent: Modellizzazione di un problema

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali:

Prerequisiti necessari: Calcolo combinatorio

Analogie/differenze con gli esercizi sugli stessi contenuti presenti nei libri di testo:
Tipologia di esercizio presente nei libri di testo.

Coerenza/distanza con i percorsi realizzati effettivamente nelle classi della riforma fino a questo momento: Coerente

Eventuali modifiche per renderlo in una forma effettivamente proponibile in sede di prova scritta di esame di Stato, coerente con le Indicazioni Nazionali:

Stima della difficoltà: 4

(Indicare un valore da 1 a 5: 1 difficoltà minima, 5 difficoltà massima)

Allegato J

Corso di formazione sull'Esame di Stato
Modena e Reggio Emilia – Coordinatrice Prof.ssa Tedeschi Carla
Giovedì 10/04/2014 dalle 15.00 alle 18.00

Lavoro 1° gruppo

Confronto tra i compiti della prova scritta dell'Esame di Stato del P.N.I. italiano e del Baccalaureat francese, anni 2012-2013.

Il gruppo si è confrontato e si è trovato d'accordo sui seguenti tre punti:

1. NUCLEI FONDANTI, presenti in entrambi i tipi di prova ma ritenuti anche importanti dai docenti del gruppo e in linea con le Indicazioni Nazionali, sono:
 - i. Relazioni e Funzioni : applicazione di derivate e integrali immediati
 - ii. Geometria: problemi di ottimizzazione; calcolo di aree e volumi (come applicazione degli integrali: punto i)
 - iii. Dati e Previsioni: come dettano le Indicazioni Nazionali, lo studente studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni.

2. TESTO DELLA PROVA.

Il tempo assegnato alla prova dovrà essere di 5 ore.

Ai docenti piace la struttura attuale delle prove del nostro Esame di Stato perché si ritiene culturalmente più completa di quella francese in quanto la nostra, rispetto a quest'ultima, obbliga lo studente a decidere la sequenza delle operazioni da eseguire per risolvere il problema e/o il quesito richiedendogli quindi più autonomia nel procedimento e una maggiore competenza; il Bac francese conduce 'troppo per mano lo studente'. La motivazione del resto è chiara: essendo la prova composta da esercizi obbligatori, con un approccio meno guidato si rischierebbe di avere pochi studenti che raggiungerebbero la sufficienza e quindi pochi studenti che possano evidenziare le competenze minime.

Per il nostro esame però resta il problema della eterogeneità della valutazione (come del resto ha evidenziato lo stesso prof. Bolondi nel suo intervento). Secondo il gruppo un buon compromesso è quello di attribuire ad ogni parte del problema e ad ogni quesito un punteggio (ed in questo si uniforma ai BAC francesi); lo studente dovrà quindi risolvere un numero di esercizi che gli permettano di raggiungere il punteggio che il MINISTERO indicherà come minimo per ottenere la sufficienza; quindi: nessun esercizio obbligatorio ma solo una soglia per la sufficienza, un po' sulla falsariga dei crediti. Si suggerisce inoltre di assegnare un punteggio maggiore agli esercizi relativi ai nuclei fondanti anche se questo non dovrà impedire il raggiungimento della sufficienza allo studente che non li sa affrontare tutti e tre, ma, per contro, dimostra di avere competenze più marcate in altri nuclei, riscontrabili e certificabili dalla risoluzione di altri quesiti/problemi secondo una logica di compensazione.

3. Non si ritiene opportuno siano proposti nella prova quesiti di storia della matematica, sulle equazioni differenziali (che si tratteranno solo per l'utilizzo in fisica) e la geometria analitica dello spazio: si ritiene infatti che il livello di trattazione non consenta la redazione di quesiti o problemi significativi dal punto di vista delle competenze.

NB. I testi del Baccalaureat francese sono reperibili agli indirizzi

http://www.math93.com/images/pdf/Annales_bac/Bac_S_2013_Metropole.pdf
<http://www.apmep.asso.fr/Terminale-S-2013-8-sujets-5>

Lavoro 2° gruppo

Esercizi proposti dai libri di testo in uso.

I libri di testo utilizzati sono tre :

- *Matematica blu* 2.0 vol. 5 aut. Bergamini, Trifone, Barozzi.
- *Lineamenti math blu* vol. 5 aut. Baroncini, Manfredi, Fragni.
- *Nuova Matematica a colori* vol. 5 aut. Leonardo Sasso.

Dopo essersi confrontate le componenti del gruppo suggeriscono tre quesiti ,che ritengono adatti per valutare le competenze matematiche al termine del percorso della riforma, sui seguenti temi:

- **Teoremi sulle funzioni derivabili**(quesito classico presente sia nei vecchi libri sia in quelli della riforma: ritenuto importante perché valuta la conoscenza di un teorema e la capacità di applicarlo)
- **Problema di ottimizzazione sulla geometria solida**(quesito classico presente sia nei vecchi libri sia in quelli della riforma preso dalla realtà: matematica per il cittadino)
- **La funzione integrale**(dal grafico all'espressione analitica e/o grafici dedotti di una funzione: i nuovi libri dedicano molto spazio a questo tipo di quesiti)

Il gruppo redige poi una breve scheda già predisposta in cui, oltre a confrontare ogni quesito con la prassi scolastica pre-riforma, individua i nuclei che possono venire valutati attraverso quella domanda e li aggancia ai punti delle Indicazioni Nazionali corrispondenti indicando i prerequisiti necessari che lo studente deve avere acquisito negli anni precedenti .

Allegato 1 – Modelli di esercizi tratti dai libri di testo

Quesito *Problema di ottimizzazione*

Quesito (dare un titolo o una sigla) **PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE**

(inserire il testo o l'immagine del quesito)

Un falegname deve costruire una cassapanca a forma di parallelepipedo con il coperchio utilizzando la minima quantità di legno. Se uno spigolo deve essere di 15 dm e il volume di 630 dm³, quanto misureranno gli altri due spigoli?

[Problemi della realtà: presenti anche nei libri precedenti, non della riforma]

Origine del quesito: Matematica Blu 2.0⁴ Vol. 5 Bergamini, Trifone, Barozzi
(es.: libro NN, es. X pag. Y; oppure Esame di Stato ordinamento, anno NNNN quesito X. Indicare se è nella versione originale o se è stata modificata o tradotta) es. 403 pag. 1839

Nuclei di contenuti coinvolti: MODELLIZZAZIONE

[Problemi 'della realtà': presenti anche negli altri testi, non solo in quelli della riforma]

Origine del quesito: Matematica Blu 2.0 vol. 5 – Bergamini, Trifone, Barozzi
Es. 403 pag. 1839

Nuclei di contenuti coinvolti: Modellizzazione

Question Intent: Valutare la capacità di costruire un modello matematico in una situazione reale.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali: Relazioni e funzioni (quinto anno): “Lo studente acquisirà familiarità con l’idea generale di ottimizzazione e le sue applicazioni in numerosi ambiti.”

Prerequisiti necessari: Geometria solida

Analogie/differenze con gli esercizi sugli stessi contenuti presenti nei libri di testo: La tipologia dell’esercizio è presente in tutti i testi consultati

Coerenza/distanza con i percorsi realizzati effettivamente nelle classi della riforma fino a questo momento: Coerente con la tendenza dei quesiti degli ultimi anni che presentano problemi di massimo e minimo riferiti a situazioni concrete.

Eventuali modifiche per renderlo in una forma effettivamente proponibile in sede di prova scritta di esame di Stato, coerente con le Indicazioni Nazionali: Inserire il costo del legno al m^3 e chiedere di ottimizzare il costo.

Stima della difficoltà: 2

(Indicare un valore da 1 a 5: 1 difficoltà minima, 5 difficoltà massima)

Quesito *La funzione integrale*

Quesito (dare un titolo o una sigla) *La funzione integrale*

Determina l'espressione analitica della funzione $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$, con $x \in [-1, 6]$, essendo $f: [-1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione di cui è tracciato il grafico in figura.

Determina l'espressione analitica della funzione $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, con $x \in [0, 6]$, essendo $f: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione di cui è tracciato il grafico in figura.

Dal grafico all'espressione analitica e/o dal grafico a grafici dedotti di una funzione: i nuovi libri danno molto spazio a questo tipo di quesiti.

Origine del quesito: NUOVA MATEMATICA A COLORI-L. SASSO VOL 5 (es.: libro NN, es. X pag. Y; oppure Esame di Stato ordinamento, anno NNXX quesito X. Indicare se è nella versione originale o se è stata modificata o rielaborata) es. 452 / 453 pag 640

Nuclei di contenuti coinvolti: Relazioni e funzioni -

[Dal grafico all'espressione analitica e/o dal grafico a grafici dedotti di una funzione: i nuovi libri di testo danno molto spazio a questo tipo di esercizi]

Origine del quesito: NUOVA MATEMATICA A COLORI-L. Sasso vol 5
es. 452/453 pag 640

Nuclei di contenuti coinvolti: Relazioni e funzioni

Question Intent: Comprensione del teorema fondamentale del calcolo integrale

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali: pag. 39: "Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale..... (calcolo di aree e volumi)

Prerequisiti necessari: elementi base di geometria analitica

Analogie/differenze con gli esercizi sugli stessi contenuti presenti nei libri di testo: Questo tipo di esercizio è presente solo sul Sasso e non sugli altri testi presi in esame.

Coerenza/distanza con i percorsi realizzati effettivamente nelle classi della riforma fino a questo momento:

Coerenza: privilegia un approccio di tipo grafico

Distanza: è differente dalla maggioranza degli esercizi proposti dai libri di testo

Eventuali modifiche per renderlo in una forma effettivamente proponibile in sede di prova scritta di esame di Stato, coerente con le Indicazioni Nazionali: declinare in modo dettagliato le richieste inserendo:

"Determinare il valore di $F(2)$, spiegando esaurientemente il ragionamento seguito."

Stima della difficoltà: 4 (dovuta soprattutto alla sua novità)

(Indicare un valore da 1 a 5: 1 difficoltà minima, 5 difficoltà massima)

Quesito *Teoremi sulle funzioni derivabili*

Quesito (dare un titolo o una sigla) **TEOREMI SULLE FUNZIONI DERIVABILI**

(inserire il testo o l'immagine del quesito)

Determina i parametri a e b in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{per } x < 0 \\ a \cos bx & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in \mathbb{R} , sapendo che $a < 0$. Stabilisci poi se è possibile applicare il teorema di Rolle nell'intervallo $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}]$; in caso affermativo trova il punto c definito da tale teorema.

[Problema presente su testi sia nuovi che precedenti la riforma; ritenuto però importante perché valuta la conoscenza di un teorema e la capacità di applicarlo]

Origine del quesito: "LINEAMENTI MATH BLU" VOL 5 BARONCINI MANFREDI FRAGNI
(es.: libro NN. es. X pag. Y; oppure Esame di Stato ordinamento, anno NNNN quesito X. Indicare se ^{TRAGM}
è nella versione originale o se è stata modificata o tradotta) Es. n° 290 pag 38

Nuclei di contenuti coinvolti: RELAZIONI E FUNZIONI QUINTO ANNO

[Problema presente su testi sia nuovi che precedenti la riforma; ritenuto però importante perché valuta la conoscenza di un teorema e la capacità di applicarlo]

Origine del quesito: Lineamenti Math Blu, vol 5 – Baroncini, Manfredi, Fragni
Es. n.290 pag. 38

Nuclei di contenuti coinvolti: Relazioni e funzioni

Question Intent: Valutare la conoscenza dell'applicabilità dei teoremi sulle funzioni derivabili

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali: Pag. 39: "Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale..."

Prerequisiti necessari: Funzioni (in particolare goniometriche)

Analogie/differenze con gli esercizi sugli stessi contenuti presenti nei libri di testo: tipologia di esercizi presente in tutti i libri di testo consultati

Coerenza/distanza con i percorsi realizzati effettivamente nelle classi della riforma fino a questo momento: Coerente

Eventuali modifiche per renderlo in una forma effettivamente proponibile in sede di prova scritta di esame di Stato, coerente con le Indicazioni Nazionali: Inserire la funzione logaritmica ed esponenziale

Stima della difficoltà: 3

(Indicare un valore da 1 a 5: 1 difficoltà minima, 5 difficoltà massima)

PAC - métropole 2013

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité :

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient 7

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité :

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient 9

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

4 POINTS

EXERCICE 1 - COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1 , 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3 .

Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

On envisage les événements suivants :

► H_1 : "l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 ",

► H_2 : "l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 ",

► H_3 : "l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 ",

► C : "l'arbre choisi est un conifère",

► F : "l'arbre choisi est un arbre feuillu".

a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 .

c) Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à 0,525.

d) L'arbre choisi est un conifère.

Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3} .

2. On choisit, au hasard, un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

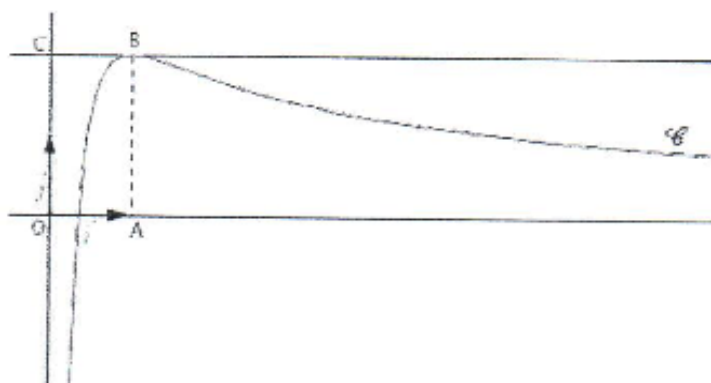
b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ? On arrondira à 10^{-3} .

c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ? On arrondira à 10^{-3} .

7 POINTS

EXERCICE 2 - COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

► les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1,0), (1,2), (0,2)$;

► la courbe C passe par le point B et la droite (BC) est tangente à C en B ;

► il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x , $f(x) = \frac{a + b \ln x}{x}$.

1. a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}$.

c) En déduire les réels a et b .

2. a) Justifier que pour tout réel appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel strictement positif,

$$f(x) = \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x}.$$

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f .

3. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0, 1]$.

b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1, +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.

Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

a) Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

b) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c) Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1} .

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe C partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.

a) Justifier que cela revient à démontrer que $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

b) En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

4 POINTS

EXERCICE 3 - COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

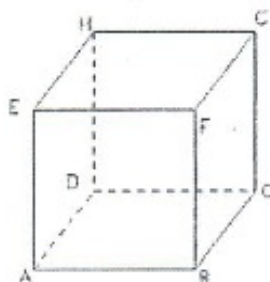
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Proposition 1 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - i| = |z + i|$ est une droite.

2. Proposition 2 : Le nombre complexe $(1 + i\sqrt{3})^3$ est un nombre réel.

3. Soit un cube.

Proposition 3 : Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.



4. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit le plan P d'équation cartésienne $x + y + 3z + 4 = 0$. On note S le point de coordonnées $(1, -2, -2)$.

Proposition 4 : La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan P a pour représentation

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

paramétrique

5 POINTS

EXERCICE 4 - CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Soit la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

- Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 . On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
- Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel $n, u_n \leq n + 3$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

c) En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^n + n$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

4. Pour tout entier non nul n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}$$

a) Exprimer S_n en fonction de n .

b) Déterminer la limite de la suite (T_n) .

5 POINTS

EXERCICE 4 - CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1^{er} janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70% résidaient à la campagne et 30% en ville.

L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

► l'effectif de la population est globalement constant,

► chaque année, 5% de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1% de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n , on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1^{er} janvier de l'année $(2013 + n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n , exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n .

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} v \\ c \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels fixés et $Y = AX$.

Déterminer, en fonction de a et b , les réels a' et b' tels que $Y = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n$ où

$X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n , $X_n = A^n X_0$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Soient les matrices

a) Calculer PQ et QP . En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q .

b) Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que :

$$v_n = \frac{1}{6}(1 + 5 \times 0,94^n)v_0 + \frac{1}{6}(1 - 0,94^n)c_0$$

Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

<http://www.ilemaths.net/sujets-bac.php>

Allegato K

Proposte di lavoro per settembre

a cura di Achille Maffini

Le attività relative al *Progetto Esame di Stato – Matematica* si svolgeranno, all'inizio del prossimo anno scolastico, in tre fasi:

- 1) Riunioni dei gruppi disciplinari nelle varie scuole;
- 2) Gruppi interprovinciali: da organizzare a cura dei referenti provinciali nella seconda metà di settembre
- 3) Riunioni plenarie a Parma (martedì 7/10) e Bologna (mercoledì 8/10).

Di seguito sono sintetizzate le proposte di lavoro nelle varie fasi. La speranza è che nel frattempo sia uscito il Decreto che norma lo svolgimento e la struttura del prossimo esame di Stato ...

1) Riunione dei gruppi disciplinari.

- a) Revisionare i piani di lavoro di terza e quarta anche alla luce degli aspetti emersi nei vari lavori sull'Esame di Stato. In particolare, si tratta di rivedere quali contenuti/competenze previste possono essere rimodulate, ridefinite o ridimensionate in vista soprattutto dell'Esame di Stato.
- b) Evidenziare, nella strutturazione del piano di lavoro della classe quinta, le criticità in funzione delle nuove indicazioni nazionali e del Syllabus proposto dal gruppo di lavoro di Ferrara. In particolare si tratterà di vedere se e in cosa modificare l'impostazione progettuale-metodologica rispetto all'attività didattica ordinaria precedente la riforma.
- c) Analizzare le tipologie di prove proposte dai gruppi interprovinciali per valutarne la loro coerenza.

2) Gruppi interprovinciali.

- a) Eventuale prosecuzione dei lavori lasciati in sospeso nell'incontro di aprile, anche in funzione delle auspicabili indicazioni ministeriali sulle tipologie di prove dell'Esame di Stato.
- b) Condivisione e raccordo di quanto emerso negli incontri dei gruppi disciplinari. L'obiettivo di questo confronto è di arrivare ad avere una base comune (percentualmente significativa) della declinazione programmatica delle Indicazioni Nazionali.
- c) Formulazione di almeno due simulazioni di prove per l'Esame di Stato, avendo come riferimento la significatività e la coerenza della prova rispetto agli obiettivi disciplinari e alle Indicazioni Nazionali.

3) Riunioni plenarie.

- a) Illustrazione e commento del Decreto Ministeriale e delle simulazioni ministeriali delle prove per l'Esame di Stato (ovviamente nella speranza ci siano entrambe le cose...).
- b) Presentazione e sintesi di quanto emerso negli incontri interprovinciali, con particolare riguardo a
 - motivazioni delle scelte nelle programmazioni;
 - motivazioni delle scelte per quanto riguarda le prove proposte.
- c) Revisione e raccolta delle prove proposte e accordi sulle modalità di testarle in classe e di dividerne i risultati.
- d) Sintesi e documento conclusivo dei lavori prodotti.
- e) Rilanci futuri?²

² Su quest'ultimo punto ci sarà forse poco da dire, nel senso che il progetto in sé termina in quest'anno solare. Sarebbe però importante che i contatti e i rapporti che si sono costruiti potessero costituire una sorta di rete per scambio di informazioni, modalità di lavoro e, perché no, prove prodotte.

Allegato L

Progetto Esame di Stato - Matematica Report incontro di Ferrara del 23/9/14 a cura di S. Bonato

PROGRAMMAZIONE di MATEMATICA V ANNO del LICEO SCIENTIFICO ORDINARIO e SCIENZE APPLICATE

Obiettivi :

1. comprendere e saper utilizzare il formalismo matematico
2. utilizzare consapevolmente le tecniche e le procedure di calcolo di limiti, derivate e integrali
3. saper applicare i teoremi sulle funzioni continue e sulle funzioni derivabili
4. saper studiare e rappresentare graficamente una funzione
5. saper collegare il grafico di una funzione con quello della sua derivata
6. saper calcolare superfici e volumi
7. sapere utilizzare la calcolatrice scientifica
8. saper risolvere problemi di ottimizzazione
9. sviluppare dimostrazioni all'interno di sistemi assiomatici proposti
10. consolidare l'intuizione geometrica nel piano e nello spazio
11. saper risolvere semplici equazioni differenziali
12. saper applicare a semplici situazioni problematiche i concetti relativi alle distribuzioni di probabilità studiate
13. saper risolvere semplici problemi di geometria analitica nello spazio con il metodo delle coordinate cartesiane
14. matematizzare semplici situazioni problematiche di varia natura
15. consolidare il rigore e la chiarezza espositiva

Percorsi modulari e Contenuti :

1. **Limiti.** Acquisire i principali concetti di topologia della retta (intervallo, intorno, punto di accumulazione, punto isolato). Acquisire i concetti di estremi, di massimo e di minimo di un insieme, di una successione e di una funzione. Conoscere le definizioni di limite di funzioni e successioni nei vari casi e la loro interpretazione geometrica; conoscere i principali teoremi sui limiti; conoscere i concetti di infinitesimo e di infinito e le operazioni fra questi; acquisire il concetto di continuità, di punti di discontinuità delle diverse specie; conoscere i teoremi sulle funzioni continue; conoscere i principali limiti notevoli; conoscere la definizione di asintoto (verticale, orizzontale, obliquo) e le condizioni analitiche per la sua esistenza.
2. **Derivate.** Conoscere la definizione di rapporto incrementale e di derivata e il loro significato geometrico e fisico; conoscere le regole di derivazione; conoscere i teoremi sulle funzioni derivabili (teorema di Rolle, teorema di Lagrange e sue conseguenze, teorema di Cauchy, teoremi di De L'Hôpital); conoscere la relazione tra continuità e derivabilità di una funzione; conoscere i principali punti di non derivabilità.

3. **Massimi, minimi e flessi.** Conoscere i concetti di estremi relativi di una funzione e le condizioni analitiche per la loro esistenza; conoscere la definizione di flesso a tangente orizzontale e obliqua e le condizioni analitiche per la sua esistenza.
4. **Studio di funzioni.** Acquisire i concetti necessari per affrontare lo studio di una funzione.
5. **Integrali.** Conoscere la definizione di trapezoide, la definizione di integrale definito e la sua interpretazione geometrica; conoscere la definizione di funzione integrale; conoscere i teoremi sugli integrali definiti; conoscere i concetti di primitiva e di integrale indefinito di una funzione; conoscere le proprietà dell'integrale indefinito e le principali regole di integrazione; conoscere i principali metodi di integrazione delle funzioni razionali fratte; conoscere le principali formule per il calcolo di superficie e di volumi.
6. **Equazioni differenziali.** Conoscere la definizione di equazione differenziale e i metodi di risoluzione semplici equazioni.
7. **Distribuzioni di probabilità.** Acquisire il concetto di variabile aleatoria e di distribuzione di probabilità e conoscere le principali distribuzioni.
8. **Geometria analitica nello spazio.** Conoscere le equazioni di un piano, di una retta e di una sfera nello spazio.

Tenuto conto del diverso peso che i temi Relazioni e Funzioni, Geometria, Dati e previsioni hanno nella programmazione del quinto anno si è ritenuto che i quesiti debbano essere così ripartiti:

- quesiti obbligatori: 2 di Analisi, 1 di Probabilità e statistica
- quesiti avanzati: 4 di Analisi, 2 di Probabilità e statistica - Geometria

Rimane un forte dubbio su cosa si debba intendere per quesito.

Di seguito una proposta di prova.

Simulazione prova per l'Esame di Stato Ferrara

QUESITI

(competenze di base ??? forse troppo di base???)

Q1. Presenta nel dettaglio i casi di discontinuità e di non derivabilità di una funzione reale di variabile reale. Successivamente determina gli eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità della funzione definita a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & x < 0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0 \leq x < 1 \\ \ln x & x > 1 \end{cases}$$

Competenze coinvolte:

- Saper classificare e determinare i punti di discontinuità e di non derivabilità di una funzione
- Saper calcolare limiti di funzioni
- Saper applicare il limite notevole $\sin x / x$
- Saper calcolare derivate di funzioni elementari e non

Tempo previsto: 20 – 25 minuti

Q2. Data la funzione reale $f(x) = x^n + 2x - 1$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$

- determina per quali valori di n la funzione risulta sempre crescente
 - scelto un numero n che soddisfi (i), giustifica l'affermazione: "L'equazione $f(x) = 0$ ha una sola soluzione reale"
 - verifica che tale soluzione è compresa nell'intervallo $[0 ; 1]$ e determinala, approssimata con due cifre decimali esatte, con un metodo iterativo a scelta.
-

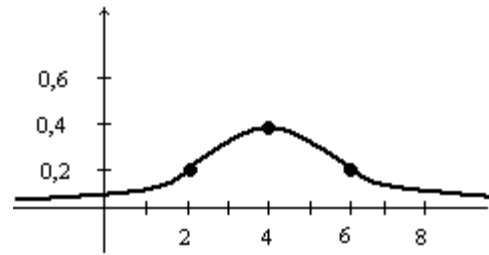
Competenze coinvolte:

- Saper calcolare derivate di funzioni elementari
- Saper applicare il teorema degli zeri
- Saper applicare un metodo iterativo

Tempo previsto: 20 – 25 minuti (1 ora se si utilizza il metodo di bisezione !!?)

Q3. Il grafico in figura, dove sono evidenziati il punto di massimo e i due punti di flesso, rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria X , avente distribuzione normale:

- a) determina il valor medio e la devianza standard di X
- b) qual è la probabilità che $X \leq 6$? E che sia $X \geq 6$?
- c) determina la probabilità che sia $5 \leq X \leq 8$



Competenze coinvolte:

- Saper interpretare un grafico e ricavare da esso informazioni
- Saper standardizzare una variabile aleatoria
- Saper utilizzare le tavole di Sheppard

Tempo previsto: 15 minuti

QUESITI “AVANZATI” (non nel senso di rimasti ...)

Q4. Due variazioni sul tema

Esame di Stato A.S. 1999 – 2000 Ordinamento (Problema 1 (a))

Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua su \mathbb{R} , tale che:

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x) dx = -5$$

Calcolare:

$$\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad \int_0^1 f(2x) dx$$

Esame di Stato A.S. 2001 – 2002 Ordinamento (quesito 10)

Dati $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, la funzione reale $f(x)$ di variabile reale, continua su \mathbb{R} , è tale che:

$$\int_0^2 f(x) dx = a \quad \text{e} \quad \int_0^6 f(x) dx = b$$

Determinare, se esistono i valori di a e b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x) dx = \ln 2 \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(2x) dx = \ln 4$$

Competenze coinvolte:

- Saper sostituire una variabile nell'integrale definito
- Saper applicare la proprietà di additività dell'integrale definito

Tempo previsto: 15 minuti

Q5. Si sono svolte alcune analisi statistiche sugli incidenti stradali dovuti ad abuso di alcool. Si è stabilito che i conducenti delle auto coinvolte negli incidenti, aventi massimo 40 anni, cui è stata attribuita la colpa di un incidente hanno un'età ben interpretata da una variabile aleatoria di densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^2} & \text{se } 18 \leq x \leq 40 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- determina k
 - determina media e varianza
 - scelto a caso un conducente di cui sopra, qual è la probabilità che abbia meno di 25 anni? E che ne abbia più di 30
-

Competenze coinvolte:

- Conoscere e saper applicare le formule di media e di varianza di una variabile aleatoria continua
- Saper calcolare integrali di funzioni elementari

Tempo previsto: 20 – 25 minuti

Q6. La concentrazione C di un antibiotico nel sangue dopo un tempo t dall'assunzione è data dalla funzione

$$C(t) = \frac{3!}{1 - \left(\frac{t}{k}\right)^4}$$

nella quale $k > 0$ è un parametro dipendente da condizioni fisiche. Determinare il valore di k , se la massima concentrazione si raggiunge dopo 6 ore.

Competenze coinvolte:

- Stabilire la relazione tra punti di minimo o di massimo e derivata nulla della funzione

Tempo previsto: 20 – 25 minuti

Q7. Maturità sperimentale PNI, sessione suppletiva 1997

La distribuzione di Poisson descrive molto bene il conteggio delle disintegrazioni in un campione di nuclidi radioattivi se il campione è sufficientemente numeroso.

Un campione radioattivo contenga $2 \cdot 10^{10}$ nuclidi ciascuno dei quali ha probabilità $p = 10^{-10}$ di decadere in un secondo.

Calcolare:

- a) il numero medio atteso di decadimenti in un secondo;
 - b) la probabilità di osservare 0, 1, 2, 3 e 4 decadimenti in un secondo;
 - c) la probabilità di osservare più 4 decadimenti in un secondo.
-

Competenze coinvolte:

- Distinguere tra distribuzioni discrete e distribuzioni continue di probabilità
- Valutare la probabilità di un evento che si comporti secondo il modello della distribuzione di Poisson

Tempo previsto: 15 minuti

Q8. Tracciare il grafico del tratto di curva $y = \sqrt{x^2 - 9}$ tra $x = 3$ e $x = 6$. Senza cercare di calcolare l'integrale, dedurre che

$$4 < \int_3^6 \sqrt{x^2 - 9} \, dx < 3\sqrt{3}$$

spiegando il ragionamento seguito per dare la risposta.

Competenze coinvolte:

- Disegnare con buona approssimazione il grafico di una funzione
- Definire l'area sottesa a un grafico

Tempo previsto: 20 – 25 minuti

Q9. Anche qui due variazioni sul tema

Considerare la seguente figura

- a) Si chiedono Le coordinate di D affinché $ABCD$ sia un parallelogramma
b) L'area di questo parallelogramma

Nello spazio euclideo tridimensionale dotato di riferimento cartesiano sono assegnati i piani di equazioni

$$\alpha : x + 2y + kz = k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\beta : 2x + 4y + (3k - 1)z = 4$$

- a) Si determini la reciproca posizione di α e β per $k = 1$
b) Si determini quindi la posizione dei due piani in dipendenza di k
c) Esiste un k reale per il quale i due piani sono perpendicolari?
-

Competenze coinvolte:

- Rappresentare un punto dello spazio in un riferimento cartesiano tridimensionale
- Determinare la distanza tra due punti nello spazio
- Stabilire quando due piani sono paralleli e/o perpendicolari

Tempo previsto: 20 – 25 minuti

ALTRI QUESITI PROPOSTI

Competenze di base

Disegna il grafico di una funzione $y = f(x)$ che soddisfi tutte le seguenti condizioni.

- Dominio = $] -\infty; -3[\cup] -3; 1[\cup \{2\} \cup]3; +\infty[$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1^+$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$.
- $f(0) = 0$, $f(2) = 2$.
- f è strettamente crescente per $x < -3$ e per $-3 < x \leq 0$; f è non crescente per $0 \leq x < 1$.

Ricava le seguenti informazioni sulla $f(x)$.

- a) Scrivi le equazioni degli eventuali asintoti verticali o orizzontali.
- b) $f(x)$ può intersecare un suo asintoto orizzontale per $x < -3$? E per $x > 3$?
- c) La disequazione $f(x) > 0$ ha soluzioni per $-3 < x < 1$? E per $-3 < x < 3$?
- d) Si può calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$? Se sì, quanto vale?

Da una statistica in una scuola è risultato che lo 0,6% degli studenti possiede più di 100 libri di narrativa. In un gruppo di 20 studenti, studia la variabile casuale $X = \text{«numero delle persone che posseggono più di 100 libri»}$ e determina il valor medio, la varianza e la deviazione standard. Determina inoltre la probabilità che il numero di studenti con più di 100 libri sia più di 1 nel gruppo dei 20 studenti considerati.

Quesiti avanzati

Supponi di percorrere in automobile un tratto di autostrada di lunghezza 60 km in un'ora esatta. Spiega perché il teorema di Lagrange garantisce che il tachimetro indichi, almeno una volta, esattamente 60 km/h.

Mostra, attraverso un appropriato controesempio, che la tesi del teorema di Lagrange non è valida qualora non sia soddisfatta l'ipotesi di derivabilità della funzione all'interno dell'intervallo considerato.

Facendo nuovamente riferimento al caso pratico citato in precedenza, è realistico ipotizzare che la funzione che associa al tempo la posizione dell'auto abbia punti di non derivabilità? Perché?

Considera un serbatoio cilindrico la cui base abbia area 1 m^2 e indica con $h(t)$ l'altezza in metri del liquido in esso contenuto al tempo t (espresso in s). Supponi che il serbatoio sia alimentato da una condotta e che l'afflusso (espresso in m^3/s) di liquido sia espresso in funzione del tempo da $f(t)$. Qual è il legame tra $h(t)$ e $f(t)$? Enuncia il teorema corrispondente del calcolo differenziale. Sotto condizioni realistiche, $h(t)$ può essere discontinua?

Allegato M

Progetto Esame di Stato - Matematica Report incontro di Parma del 25/9/14 a cura di A. Maffini

Partecipanti: Achilli Alberta, Azzini Paola, Bortolan Laura, Chairi Alessandra, Crovini Milena, Melley Stefania, Nicoli Franca, Rizza Angela, Ugolotti Barbara.

Scaletta incontro:

- 1) Comunicazioni.
- 2) Condivisione e raccordo di quanto emerso negli incontri dei gruppi disciplinari. L'obiettivo di questo confronto è di arrivare ad avere una base comune (percentualmente significativa) della declinazione programmatica delle Indicazioni Nazionali.
- 3) Formulazione di almeno due simulazioni di prove per l'Esame di Stato, avendo come riferimento la significatività e la coerenza della prova rispetto agli obiettivi disciplinari e alle Indicazioni Nazionali.

1) All'inizio Maffini comunica lo stato attuale (a lui nota) relativa all'Esame di Stato:

- non è ancora uscito un decreto ufficiale sulla struttura dell'esame;
- voci sempre più insistenti (ed affidabili) parlano di una prova strutturata su tre quesiti da svolgere obbligatoriamente e tre da scegliere tra (sembra) sei. I quesiti dovrebbero collocarsi, in termini di difficoltà, tra gli attuali quesiti presenti nel questionario e gli attuali problemi;
- alcuni insegnanti di fisica hanno prodotto, per conto dell'AIF, una simulazione di prova d'esame sulla base di queste indicazioni e sulla base di altre voci che parlano di un'alternanza tra matematica e fisica al liceo scientifico e matematica, fisica e scienze al liceo delle scienze applicate;
- sempre secondo voci autorevoli, il Ministero si guarderà bene dal produrre esempi di prove d'esame. Eventuali informazioni potrebbero forse essere carpite da qualche Ispettore in qualche occasione ufficiale (Convegni o altro);
- il 29 e 30 settembre si terrà a Rovigo un seminario nell'ambito del progetto PP&S a cui sono invitate le scuole-polo di tale progetto dal titolo **Elaborazione di Simulazioni di Seconda Prove relative agli Esami di Stato 2014 -2015 a conclusione del primo quinquennio di applicazione delle Indicazioni Nazionali**. Per tale seminario è prevista la trasmissione streaming. Se riuscirà ad avere l'indirizzo web o, più in generale, i materiali prodotti, ne darà comunicazione.

La discussione susseguente si è concentrata sulle difficoltà in cui si sta lavorando in assenza di indicazioni ufficiali, oltre che sulle scelte da fare in termini didattici.

2) Si è passati all'analisi della revisione della programmazione degli ultimi tre anni svoltasi negli incontri dei gruppi disciplinari di inizio anno.

Come base di discussione/confronto si è presa la programmazione del Liceo Ulivi. Maffini illustra il documento soffermandosi, in particolare, sulle scelte che sono state fatte dal suo Istituto soprattutto per quanto riguarda la geometria analitica (poco spazio ad ellisse e iperbole, se non dal punto di vista della rappresentazione, nell'ottica di allargare il campionario delle funzioni rappresentabili) e la goniometria (dare poco spazio agli aspetti più strettamente algebrici della gestione delle formule). La successiva discussione ha riguardato soprattutto le modalità di presentazione e gestione di argomenti per il programma di matematica liceale, quali il calcolo delle probabilità e la statistica, geometria analitica dello spazio, le equazioni differenziali. Si discute inoltre sull'opportunità di anticipare o posticipare alcuni contenuti, in funzione di una specifica programmazione e della possibilità di integrare in modo più dinamico le programmazioni di matematica e fisica per valutare quali contenuti possono esser svolti in una materia a supporto dell'altra. In sostanza, anche la scansione temporale dei contenuti dovrebbe essere figlia di una filosofia che faccia da guida al percorso stesso.

In conclusione, le insegnanti presenti hanno confermate che le scelte fatte dalle rispettive scuole in

termini di contenuti ricalcano, per buona parte, quella proposta al liceo Ulivi. Si tende quindi a ritenerla una base realistica su cui strutturare un potenziale syllabus per il triennio.

3) Si discute sulla struttura di una possibile prova d'esame alla luce delle voci circolanti. In particolare ci si sofferma su quali argomenti dovrebbero essere presenti e in quali parti (obbligatori o a scelta). Alla fine della discussione si elabora la proposta riportata nell'allegato 2 in cui sono anche indicati i nomi delle insegnanti che si occuperanno di formulare una proposta per ciascuno dei temi individuati.

L'analisi delle prove della maturità svizzera mette poi in evidenza una buona congruità tra le Indicazioni Nazionali e le ipotesi sulla struttura della prova. Sono quindi ritenute un buon materiale da cui attingere idee e proposte per la stesura della prova stessa, oltre al materiale prodotto nei precedenti incontri provinciali e, ovviamente, le prove di matematica degli esami di stato degli anni precedenti.

Nell'allegato 3 è poi riportata la simulazione prodotta corredata con le indicazioni emerse negli incontri plenari del 7 e 8 ottobre.

Parma, 25 settembre 2014

Allegato 1

Contenuti specifici – Classe Terza

Relazioni e funzioni

- Successioni reali definite ricorsivamente e analiticamente.
- Funzioni reali a variabile reale: proprietà.
- Funzioni definite da una o più espressioni analitiche; concetto di restrizione di una funzione.
- Composizione di funzioni e condizioni di invertibilità.
- Particolari funzioni: funzione valore assoluto, funzioni irrazionali.

Geometria analitica del piano

- Nozioni preliminari di geometria analitica: distanza tra due punti, punto medio di un segmento, baricentro di un triangolo.
- Retta nel piano cartesiano: proprietà analitiche della retta, traduzione analitica di condizioni geometriche, problemi sulla retta, retta come grafico di modelli lineari per lo studio dei fenomeni.
- Fasci di rette.
- Circonferenza e parabola nel piano cartesiano: dalle proprietà geometriche alle condizioni analitiche.
- Condizioni per la determinazione dell'equazione di una circonferenza o di una parabola.
- Condizioni di tangenza e determinazione equazioni rette tangenti.
- Fasci di circonferenze e fasci di parabole.
- Ellisse e iperbole dal punto di vista analitico: determinazione dell'equazione canonica.
- Rappresentazione di curve deducibili da coniche a partire dall'equazione analitica.
- Coniche o rami di coniche come grafici di funzioni reali a variabile reale; funzione omografica.
- Equazioni e disequazioni algebriche irrazionali e con valore assoluto, viste anche rispetto alla loro interpretazione analitica.

Numeri reali: verso un approccio sistemico

- Definizione di potenze ad esponente reale; studio di particolari numeri trascendenti (π ed e).
- Progressioni: definizione, proprietà e modellizzazioni; problemi connessi col concetto di infinito.
- Potenze ad esponente reale. Funzioni esponenziali e funzioni logaritmiche.
- Logaritmo come oggetto matematico e proprietà dei logaritmi; importanza e uso delle proprietà dei logaritmi in ambito algebrico.
- Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche: classificazione, tecniche risolutive e loro connessione con le funzioni di riferimento.
- Visualizzazione di soluzioni di equazioni e disequazioni trascendenti e approcci alla determinazione approssimata delle soluzioni.
- Modelli esponenziali per lo studio dei fenomeni

Statistica descrittiva

- Indici statistici (di posizione centrale e di variabilità).
- Dipendenza, correlazione e regressione di serie di dati statistici.

Contenuti specifici – Classe Quarta

Goniometria

- Funzioni goniometriche: definizione e proprietà.
- Grafici delle funzioni goniometriche e grafici deducibili.
- Angoli associati.
- Formule relative alle funzioni goniometriche
- Equazioni e disequazioni goniometriche; visualizzazione grafica delle soluzioni di equazioni e disequazioni coinvolgenti funzioni trascendenti e funzioni algebriche.

Contenuti correlati

Propedeutici: particolari trasformazioni nel piano cartesiano (traslazioni, dilatazioni, omotetie)

Complementari: trasformazioni nel piano cartesiano (rotazioni, similitudini, isometrie); numeri complessi

Trigonometria

- Teoremi dei seni, del coseno, della corda.
- Area di un triangolo.
- Risoluzione di un triangolo qualunque.
- Modellizzazione con funzioni goniometriche di problemi di geometria; individuazione delle condizioni di massimo e minimo.

Contenuti correlati

Modelli matematici: utilizzo delle funzioni goniometriche per modellizzare e studiare situazioni reali.

Lo spazio

- Geometria sintetica dello Spazio: rette, piani, condizioni di perpendicolarità e di parallelismo.
- Diedri e triedri.
- Studio dei solidi: solidi di rotazioni, equivalenza dei solidi, aree e volumi dei solidi notevoli.
- Risoluzione di problemi di geometria solida impostati in modo trigonometrico.

Calcolo combinatorio e probabilità

- Nozioni di calcolo combinatorio.
- Probabilità: definizione classica, frequentista, assiomatica.
- Eventi aleatori eventi composti e probabilità.
- Probabilità condizionata e dipendenza tra eventi.
- Teoremi principali del calcolo della probabilità e loro utilizzo in contesti problematici.

Contenuti specifici – Classe Quinta

Geometria analitica dello spazio

- Coordinate cartesiane nello spazio; distanza tra due punti nello spazio.
- Fasci e stelle di piani nello spazio; equazione cartesiana di un piano nello spazio.
- Equazioni cartesiane e parametriche di una retta nello spazio.
- Mutue posizioni fra due piani e fra un piano e una retta nello spazio: condizioni di parallelismo, incidenza, perpendicolarità.
- Mutua posizione di due rette nello spazio.
- Equazione di una sfera; mutue posizioni tra un piano e una sfera, fra una retta e una sfera, tra due sfere.

Contenuti correlati

Prodotto vettoriale di due vettori.

Funzioni, limiti e continuità

- Successioni e progressioni.
- Nozioni di topologia su \mathbb{R} : intorni, estremo superiore, estremo inferiore, punti di accumulazione e punti isolati.
- Definizioni di limite in un punto al finito e all'infinito; limite destro e sinistro.
- Enunciati e dimostrazioni dei teoremi fondamentali sui limiti: teorema dell'unicità del limite, teorema della permanenza del segno, teorema del confronto.
- teorema dell'algebra dei limiti; limite di una funzione composta.
- Limiti notevoli e calcolo dei limiti riconducibili a limiti notevoli.
- Infiniti e infinitesimi.
- Definizione di funzione continua; continuità di funzioni elementari.
- Teoremi sulle funzioni continue in intervalli chiusi e limitati: Weierstrass, Bolzano, Darboux.
- Forme indeterminate e loro gestione.
- Punti di discontinuità e di non continuità di una funzione.
- Asintoti e metodi per calcolare l'equazione della retta asintotica del grafico di una funzione.

Calcolo differenziale e calcolo integrale

- Definizione puntuale di derivata e di funzione derivata; significato geometrico di derivata.
- Applicazione del concetto di derivata in fisica.
- Relazione tra continuità e derivabilità di una funzione.
- Derivate delle funzioni elementari; teorema dell'algebra di funzioni derivabili; derivata di una funzione composta e derivata delle funzioni inverse; derivate di ordine superiore.
- Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange; loro significato geometrico e fisico.
- Teorema di de L'Hospital e applicazioni al calcolo di limiti.
- Definizione e significato geometrico del differenziale; differenziabilità e derivabilità.
- Punti estremanti, assoluti e relativi; criteri per la determinazione dei punti estremanti (con dimostrazione).
- Funzioni crescenti e decrescenti; relazione tra monotonia e derivata prima.
- Concavità, convessità e punti di flesso; relazioni con la derivata seconda di una funzione.
- Punti singolari: punti angolosi, cuspidi e flessi a tangente verticale.

- Studio di funzione.
- Problemi di ottimo col metodo delle derivate.
- Primitiva di una funzione e definizione di integrale indefinito.
- Tecniche di integrazione: integrali indefiniti immediati, integrazione per scomposizione, integrazione per sostituzione, integrazione per parti, integrazione delle funzioni razionali fratte.
- Il problema delle aree: l'area del trapezoide; definizione e proprietà dell'integrale definito.
- Enunciato e dimostrazione dei teoremi della media integrale e del teorema fondamentale del calcolo integrale (teorema di Torricelli-Barrow).
- Calcolo di integrali definiti; applicazione dell'integrale definito al calcolo di aree e volumi; integrali cilindrici; integrali generalizzati.
- Equazioni differenziali.

Contenuti correlati

Risoluzione approssimata di equazioni.

Integrazione numerica.

Variabili aleatorie discrete e continue

- Distribuzioni discrete di probabilità: distribuzione binomiale, distribuzione di Poisson e loro applicazioni. Variazione delle distribuzioni binomiale e di Poisson al variare dei loro parametri.
- Variabili aleatorie continue e loro distribuzioni: distribuzione normale e sue applicazioni.
- Definizione e interpretazione di valore atteso, varianza e deviazione standard di una variabile aleatoria.

Contenuti correlati

Operazione di standardizzazione; confronto e studio di distribuzioni statistiche e di probabilità

Allegato 2

Simulazione di una prova per l'esame di Stato

Premesse metodologiche:

- Ci si è basati sull'ipotesi (di cui si vocifera da più parti) che nella prova siano presenti 3 quesiti da svolgere obbligatoriamente e 3 da scegliere tra 6.
- La struttura dei quesiti si collocherà, in termini di difficoltà, a 'metà' tra quella degli attuali quesiti presenti nel questionario e degli attuali problemi.
- Nei 'Quesiti obbligatori' si valuteranno competenze ritenute fondamentali e che certifichino il raggiungimento degli obiettivi di base.
- Nei 'Quesiti a scelta' si valuteranno invece competenze più alte, tali da favorire una diversificazione nel grado di raggiungimento delle competenze complessive.

Materiali utilizzati e utilizzabili:

- Quelli prodotti nei precedenti incontri.
- Prove della maturità svizzera
- Quelli presenti nei libri di testo o nelle prove degli anni passati.

Struttura della prova e suddivisione dei compiti

Obbligatori

- | | |
|---|-------------------|
| - Analisi: sui concetti | Paola Azzini |
| - Analisi: sulle applicazioni | Alessandra Chiari |
| - Prob/Statistica (Calcolo probabilità) | Barbara Ugolotti |

A scelta

- | | |
|--|-----------------|
| - Geometria dello spazio | Franca Nicoli |
| - Prob/statistica (Statistica e distr. prob) | Stefania Melley |
| - Analisi (di varia umanità) | Laura Bortolan |
| - Geometria analitica nel piano o nello spazio | Angela Rizza |
| - Trigonometria e/o complessi | Alberta Achilli |
| - Equazioni differenziali | Milena Crovini |

Allegato 3

Simulazione prova per l'Esame di Stato Parma-Piacenza

A) Quesiti obbligatori

Quesito 1

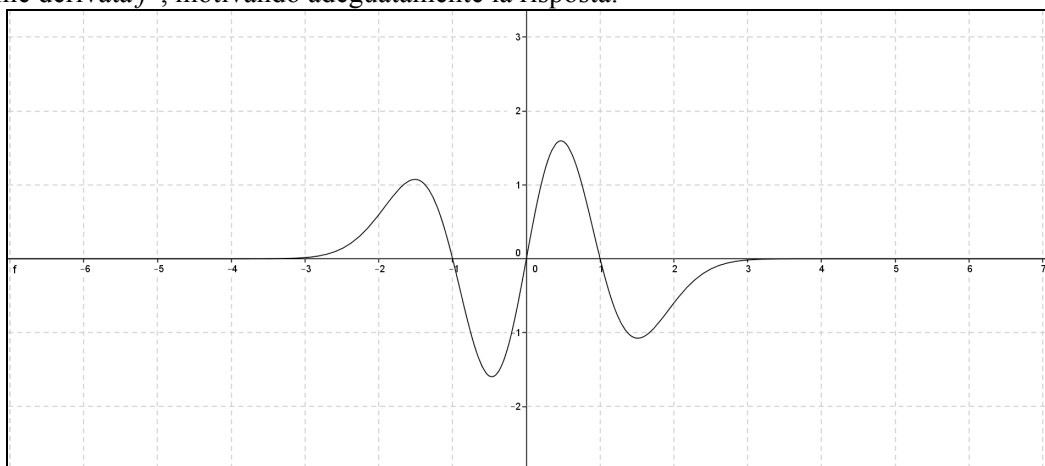
Data la famiglia di funzioni : $y = \frac{ax^3 - 5x^2 + 8x + 4}{bx^2 - 2x}$ con $a \in \mathfrak{R}$ e con $b \in \mathfrak{R}$ determinare:

- la funzione il cui grafico ha un asintoto obliquo parallelo alla retta di equazione $2y - x = 0$ e per asintoto verticale la retta di equazione $2x = 1$;
- le funzioni i cui grafici hanno asintoto orizzontale;
- la funzione il cui grafico ha un asintoto orizzontale ed un asintoto verticale coincidente con la retta di equazione $x - 1 = 0$.
Posto $a=0$ e $b=1$
- studiare la continuità della funzione, classificandone gli eventuali punti di discontinuità;
- restringere e/o modificare il dominio della funzione in modo da ottenere una funzione continua;
- illustrare eventuali collegamenti tra studio degli asintoti e continuità di una funzione.

Quesito 2

È assegnata la famiglia di funzioni reali a variabile reale f_k definite da $f_k(x) = x^2 e^{(1-kx^2)}$, con k parametro reale positivo.

- Mostrare che tutte le funzioni f_k ammettono un asintoto orizzontale di cui si chiede l'equazione.
- Una delle funzioni della famiglia data, che d'ora in poi sarà indicata con f , ha come derivata la funzione f' il cui grafico è mostrato nella figura. Trovare il valore di k per il quale la corrispondente funzione ha come derivata f' , motivando adeguatamente la risposta.



- Verificato che il valore richiesto al punto b) è $k=1$, stabilire quanti sono i punti di flesso del grafico della funzione f e individuare intervalli di ampiezza 1 che li contengano.
- Dimostrare, facendo riferimento ad una proprietà della funzione f , che risulta:
$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

Motivazioni:

- Applicazioni del calcolo differenziale
- Lettura di un grafico
- Calcoli non troppo complessi (se si ricavano le informazioni dal grafico)

Quesito 3

3A) Si hanno tre urne le cui composizioni sono:

H1 = 8 palline rosse e 4 palline verdi. H2 = 6 palline rosse e 6 palline verdi. H3 = 8 palline rosse e 4

palline verdi. Per decidere da quale urna estrarre una pallina, si lancia un dado e i sei punteggi sono così suddivisi: Esce 1, si estrae una pallina dalla prima urna; Esce 2 o 3, si estrae una pallina dalla seconda urna; Esce 4 o 5 o 6, si estrae una pallina dalla terza urna.

Nell'ipotesi che la pallina estratta sia rossa, qual è la probabilità che essa provenga dalla seconda urna?

3B) Un'urna contiene 2 biglie bianche e 5 nere. Estraiamo una prima biglia: se è nera, la rimettiamo dentro con altre due dello stesso colore, se è bianca, non rimettiamo niente. Estruendo la seconda biglia, qual è la probabilità che sia nera?

3C) Dato un triangolo equilatero di lato 10 cm, prendi, internamente a ciascuno dei suoi lati due punti a distanza x cm dagli estremi del lato in modo tale che questi sei punti siano i vertici di un esagono. La figura ottenuta rappresenta il bersaglio che viene utilizzato in una gara di tiro. Il triangolo è la superficie di tiro e la superficie dell'esagono rappresenta il bersaglio. Con quale probabilità $p(x)$ faccio centro facendo un tiro soltanto? Per quale valore di x ottieni come probabilità $1/4$? In questo caso il bersaglio che forma assume?

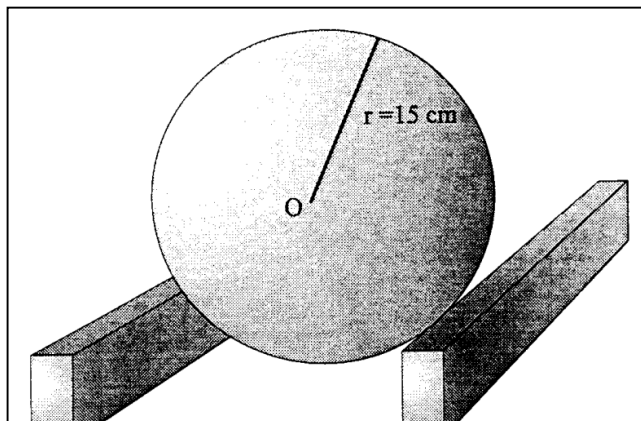
3D) Lanciando un dado truccato la probabilità che esca il numero 6 è pari a $1/3$, la probabilità che esca 4 è pari a $1/6$, la probabilità che esca 5 è pari a $1/6$ mentre gli altri eventi elementari hanno uguale probabilità. Calcolare la probabilità che

1. lanciando il dado tre volte si ottenga a) tre volte 6, b) non si ottenga nessun 6, c) la somma 15
2. lanciando il dado due volte si ottenga almeno un numero pari
3. lanciando il dado n volte si ottenga almeno un numero dispari. Si determini n in modo che tale probabilità sia maggiore del 95%.

B) Quesiti a scelta (tre tra i sei proposti)

Quesito 1

Una sfera di raggio $r = 15$ cm è appoggiata su due binari distanti tra loro 24 cm come in figura. Se la sfera effettua una rotazione completa, di quanto avanza sui binari?



Quesito 2

Per l'acquisto di un'immobile, l'offerta può variare tra 0 e 3 milioni di euro ed è considerata una variabile aleatoria continua X . E' data la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} c(9 - x^2) & \text{se } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 3 \end{cases} \quad \text{dove } c \text{ è un parametro reale.}$$

- a) Trovare il valore di c che rende la funzione f una funzione densità di probabilità associata alla v.a. X
- b) Verificato che si ottiene $c = \frac{1}{18}$, per tale valore ricavare la funzione di ripartizione $F(x)$.

- c) Utilizzare la funzione F per determinare la probabilità di perdere l'acquisto con un'offerta massima di 1 milione di euro.
- d) Verificare che con un'offerta compresa fra 2,1 e 2,2 milioni di euro si ha la probabilità del 90% di aggiudicarsi l'immobile.

Motivazioni

- Significato della funzione densità di probabilità e della funzione di ripartizione
- Semplici applicazioni del calcolo integrale e del teorema degli zeri

Quesito 3

Data la funzione $F(x) = \int_2^x \sqrt{t} \cdot e^{-t} dt$, senza trovare la sua espressione analitica, giustificare perché il dominio è \mathbb{R} .

- a) Stabilire se il grafico della funzione ammette asintoti orizzontali.
- b) Calcolare e studiare la derivata prima. La funzione è derivabile in \mathbb{R} ?
- c) Tracciare il grafico della funzione.
- d) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto di ascissa 2.
- e) Calcolare $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x)}{x^2 - 4}$.

Quesito 4

4A) Nello spazio, dotato di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxyz, sono dati i punti $A(2;-2;1)$ e $B(0;2;-3)$ e i piani α e β rispettivamente di equazioni $x+2y+z+2=0$ e $x+z-6=0$.

- a) Dopo aver descritto le possibili posizioni di due rette nello spazio, stabilire la posizione reciproca delle rette r , passante per i punti A e B , ed s , intersezione dei piani α e β .
- b) Nel caso in cui r , s siano complanari, determinare l'equazione del piano che le contiene.
- c) Determinare l'equazione del piano γ , luogo dei punti equidistanti da A e da B , verificando che risulta $x-2y+2z+1=0$.
- d) Dimostrare che l'intersezione fra la sfera S , di centro B e raggio 5, e il piano γ è una circonferenza di cui si chiede il centro e raggio.

Motivazioni:

- Capacità di visualizzare nello spazio
- Gestione dal punto di vista analitico delle equazioni di retta, piano, sfera nello spazio e delle condizioni di parallelismo e perpendicolarità
- Calcoli semplici
- Punti indipendenti ad eccezione del punto b)

4B) Considera i tre piani:

$$\alpha: x + y - z + 1 = 0$$

$$\beta: 2x + y + z - 1 = 0$$

$$\gamma: x + 2y - 3z + 5 = 0$$

- a) Verifica che i due piani α e β sono secanti e determina una rappresentazione parametrica della retta r che costituisce la loro intersezione.
- b) Deduci da che cosa è costituita l'intersezione dei tre piani α , β e γ .

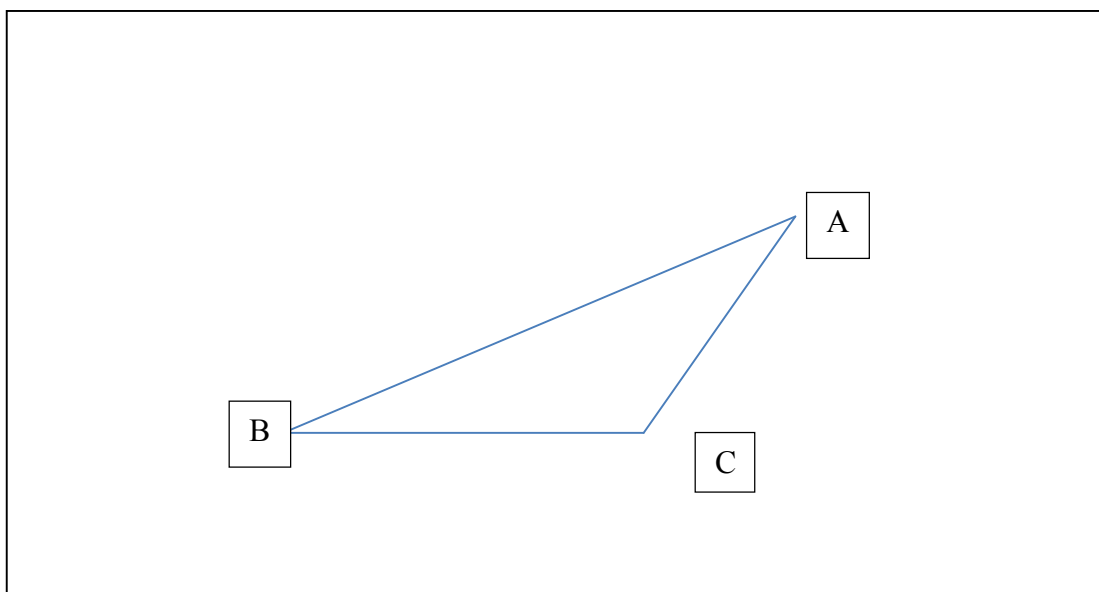
Quesito 5

5A) Considera i numeri complessi $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ e $z_2 = 1 - i$.

- Scrivi i numeri z_1 e z_2 in forma goniometrica.
- Scrivi in forma algebrica il numero $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.
- Detti ϑ_1 e ϑ_2 gli argomenti rispettivamente di z_1 e z_2 , esprimi z_3 in funzione di ϑ_1 e ϑ_2 e dall'uguaglianza ottenuta deduci il valore esatto di $\cos \frac{\pi}{12}$ e $\sin \frac{\pi}{12}$.

5B) Una nave posta nel punto B, deve raggiungere il porto, rappresentato da A. Non può percorrere la rotta BA perché la profondità non lo consente; prosegue perciò fino a C, quindi da C giunge in A (il porto). Risulta che l'angolo BAC è 120° ; inoltre la nave viaggia a velocità costante di 24 km/h e impiega 20 minuti per percorrere il tratto BC e 15 minuti per percorrere il tratto CA.

- Quando la nave era in A, quale era la sua distanza dal porto?
- Se la nave avesse potuto percorrere direttamente la rotta AB, quanto tempo avrebbe risparmiato



Quesito 6

6A) Sul tavolo della cucina che si trova ad una temperatura di 20°C , una tazza di tè, inizialmente alla temperatura di 90°C , dopo 10 minuti si trova alla temperatura di 70°C gradi.

- Trova la legge di raffreddamento della tazza di tè e illustrala anche graficamente.
- In quanto tempo la temperatura scenderà a 30°C ?
- In quanto tempo la temperatura del tè sarà di 20°C ?

Motiva adeguatamente le tue risposte (considerando trascurabile l'innalzamento della temperatura della stanza).

6B) Un corpo sferico di massa 100 g viene lasciato cadere in un mezzo viscoso che oppone una forza direttamente proporzionale alla velocità del corpo secondo un coefficiente $\lambda = 0,2 \text{ N s/m}$.

Determinare:

- l'espressione analitica della velocità in funzione del tempo;
- la velocità del corpo dopo 2 secondi;
- la sua velocità limite.

Allegato N

Progetto Esame di Stato - Matematica Report incontro di Reggio Emilia del 29/9/14 a cura di Carla Tedeschi

Partecipanti: insegnanti dei licei delle provincie di Modena e Reggio Emilia. In particolare: proff. Bizzarri M.Pia , Marabini M.Cristina , Rubbiani M.Grazia, Venturelli Giorgia, Masini Andrea, Bonacini Barbara, Fornaciari Fabio, Ferretti Anna, Canarini Annalisa, Genitoni Donatella, Guidetti M.Grazia, Monteleone M.Teresa, Benatti Monica, Bignardi Cristina, Gentili Giulia, Carretti Antonella, Grisendi Laura.

Scaletta incontro:

- 4) Condivisione e raccordo di quanto emerso negli incontri dei gruppi disciplinari. L'obiettivo di questo confronto è di arrivare ad avere una base comune (percentualmente significativa) della declinazione programmatica delle Indicazioni Nazionali.
- 5) Formulazione di almeno due simulazioni di prove per l'Esame di Stato, avendo come riferimento la significatività e la coerenza della prova rispetto agli obiettivi disciplinari e alle Indicazioni Nazionali.

Relativamente al punto 1 la prof.ssa Tedeschi invita i colleghi presenti a dare parere sui materiali prodotti dai primi incontri disciplinari: viene esaminato attentamente il sillabus steso dal gruppo di Ferrara; si ritiene sia completo però si sottolinea che sarebbe auspicabile che relativamente ai capitoli di 'Geometria analitica nello spazio' e 'Dati e Previsioni' la richiesta delle conoscenze e competenze sia a livello elementare.

Prima di iniziare l'attività del punto due ci siamo collegati al Convegno sull'Esame di Stato di Rovigo e abbiamo avuto la conferma dall'Ispettrice Palumbo che la prova sarà strutturata su tre quesiti da svolgere obbligatoriamente e tre da scegliere tra (sembra) sei. I quesiti dovrebbero collocarsi, in termini di difficoltà, tra gli attuali quesiti presenti nel questionario e gli attuali problemi. Inizia qui una discussione su come sarà il punteggio degli esercizi e di quanta e quale importanza avranno i quesiti obbligatori: ci si augura che uno studente possa risolvere i quesiti a scelta anche se non ha affrontato e risolto tutti gli obbligatori.

Si passa poi alla formulazione delle simulazioni delle prove dell'Esame di Stato: ci si confronta su quesiti proposti dai colleghi presenti.

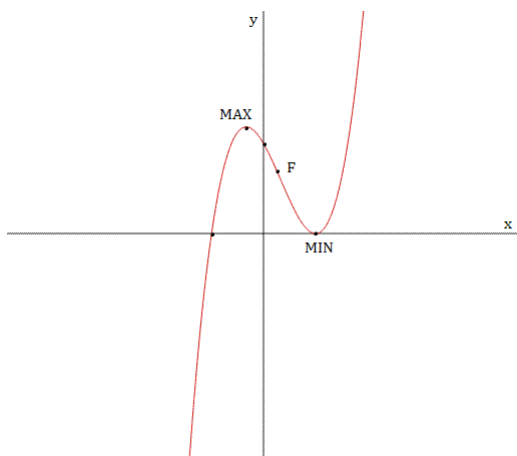
Di seguito le due proposte (in rosso sono state lasciate delle domande ritenute possibili ma che *forse* renderebbero la prova troppo lunga).

Simulazioni prove matematica per esame di stato

SIMULAZIONE n° 1

Quesiti Obbligatori

Quesito1



La funzione $y = f(x)$ disegnata in figura presenta un punto di MAX $(-1.5, 3)$, un punto di MIN $(2, 0)$, il flesso $F(1, 1)$ e due punti di intersezione con gli assi $(0, 1)$, $(-2, 0)$

1. Individuare graficamente cosa rappresenta $\int_{-2}^1 f(x) dx$
2. Si deduca il grafico della $h(x) = \log f(x)$, motivando esaurientemente i passaggi.
3. Si deduca il grafico della $f'(x)$, motivando esaurientemente i passaggi.

Quesito 2

In un sistema di assi cartesiani Oxy si disegni la circonferenza di diametro OA dove $A(2, 0)$.

- a) Si scrivano le equazioni della semicirconferenza disegnata nel primo quadrante degli assi e della semiretta di origine O e che forma con il semiasse positivo delle x un angolo di $\frac{\pi}{4}$.
- b) Detto B l'ulteriore punto di intersezione tra la semiretta e la semicirconferenza, si calcoli l'area del triangolo mistilineo individuato dall'angolo OAB e dalla semicirconferenza (senza fare uso di integrali)
- c) Si calcoli il volume del solido che si ottiene ruotando il segmento circolare OB attorno all'asse x .

Quesito 3

Un filo metallico di lunghezza l viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

- b) la somma delle due aree sia minima?
- c) la somma delle due aree sia massima?

Quesiti a scelta

- a) Dimostrare che l'equazione $x^4 - 7x^2 - 20x - \sqrt{2} = 0$ ha esattamente una soluzione reale nell'intervallo $]0; 1[$. Trovare poi la soluzione con un metodo a scelta, con un'approssimazione alla seconda cifra decimale.
- b) Andrea e Paolo praticano il tiro al piattello. Per ogni piattello lanciato, comincia Andrea sparando un singolo colpo: se Andrea colpisce il piattello, Paolo non spara, se Andrea non lo colpisce, allora spara un colpo o Paolo. La probabilità che con un colpo o Andrea colpisca il bersaglio è del 75%, la probabilità che Paolo colpisca il bersaglio è del 60%. Vengono lanciati 5 piattelli. Sia X la variabile aleatoria che conta quante volte Paolo spara. Determinare il range di X e la sua media. Determinare la probabilità dei seguenti eventi:
 A = Paolo non spara mai
 B = Paolo colpisce il bersaglio una sola volta, sapendo che spara tre volte.
- c) Una cisterna per l'acqua ha la forma di un cono circolare rovesciato, con raggio di base due metri e altezza 4 metri. Sapendo che la cisterna si riempie di acqua ad una velocità di $2 \text{ m}^3/\text{min}$, trovare la velocità a cui il livello dell'acqua sta salendo quando l'altezza dell'acqua è 3 m .
- d) Si determini l'equazione della superficie sferica che interseca il piano Oxy formando la circonferenza $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ e il cui centro è un punto di quota -5 .
- e) Determinare i valori dei parametri reali a, b in modo che risulti $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{x^2 - x - 1} - ax - b) = 0$
- f) Enunciare il teorema del valor medio o di Lagrange illustrandone il legame con il teorema di Rolle e le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve
La curva $\sqrt{y+1} = x^2$ passa per i punti $(1; 0)$ e $(-1; 0)$. Vale il teorema di Rolle nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$?

SIMULAZIONE n° 2

Quesiti Obbligatorii

Quesito 1

Sia

$$I(c) = \int_0^1 ((x-c)^2 + c^2) dx$$

dove C è un numero reale.

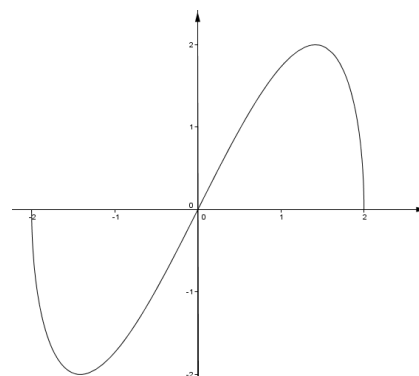
- (i) Traccia $y = (x-1)^2 + 1$, $x \in [-1; 3]$ ed evidenzia sul tuo grafico l'area rappresentata dall'integrale $I(1)$.
- (ii) Senza calcolare $I(c)$, spiega perché $I(c) \geq 0$ per ogni valore di C .
- (iii) Calcola $I(c)$.
- (iv) Qual è valore minimo di $I(c)$ al variare di C ?
- (v) Qual è il valore massimo di $I(\sin \theta)$ al variare di θ ?

Quesito 2

A lato è disegnato il grafico Γ della funzione

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

- 1. Si calcolino il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$.
- 2. Si dica se l'origine O è centro di simmetria per Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x .
- 3. Si disegni la curva d'equazione $y^2 = x^2(4-x^2)$ e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.



Quesito 3

In un noto gioco televisivo un concorrente ha un “capitale iniziale” di 32000€ e gli vengono poste 5 domande del tipo Vero/Falso cui il concorrente è costretto a rispondere a caso: ogni volta che sbaglia il capitale viene dimezzato mentre se risponde correttamente resta invariato; sia X il capitale con cui si ritrova il concorrente al termine delle cinque domande. Determinate:

qual è la probabilità che il concorrente risponda sempre in modo esatto;

il numero Y di risposte corrette si può esprimere con una variabile aleatoria binomiale: perché? Determinare la distribuzione di Y e la sua moda;

Determinare la distribuzione della variabile casuale X : mediamente quanto rimane al concorrente?

considerare i seguenti eventi

E “il concorrente risponde correttamente ad esattamente una domanda”

F “il concorrente risponde correttamente alla prima domanda”

e calcolare la probabilità di E a condizione di F e di F a condizione di E verificando che si ottiene $P(F/E)=1/5$, $P(E/F)=1/16$; E ed F sono indipendenti? Perché?

Alberto e Barbara scommettono sul risultato del concorrente: Alberto darà a Barbara 5 euro se ci saranno almeno due risposte corrette.

Affinché il gioco sia equo quanto deve dare Barbara ad Alberto in caso contrario? .

Quesiti a scelta

- a. Si consideri la funzione $f(x) = \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$

Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \rightarrow +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hôpital.

- b. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri affinché sia minima la quantità di latta necessaria per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta)

c. È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in metri e radianti). Sia $r = 2$

e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si

calcoli il volume di W .

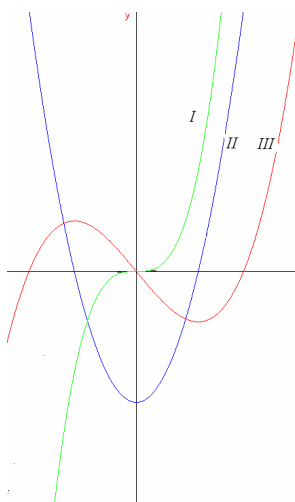
d. Siano $z_1 = x + i(y+1)$ e $z_2 = (x-1) - iy$ due numeri complessi e sia $z = z_1 \cdot z_2$ il loro prodotto. Rappresentare in un sistema di assi cartesiani la parte di piano che soddisfa $\Re(z) < 0$, dove $\Re(z)$ rappresenta la parte reale del numero complesso, e se ne calcoli l'area.

e. Nella figura, denotati con I, II, III, sono disegnati tre grafici.

Uno di essi è il grafico di una funzione f , un altro è quello della derivata f' e l'altro ancora di

f' . Quali fra le seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

| | f | f' | f'' |
|----|-----|------|-------|
| A) | I | II | III |
| B) | I | III | II |
| C) | II | III | I |
| D) | III | II | I |
| E) | III | I | II |



Il telescopio spaziale Hubble fu posizionato il 24 aprile del 1990 dalla navicella spaziale Discovery. Un modello per la velocità della navicella durante questa missione, dal decollo in $t = 0$ allo sgancio dei razzi propulsori in $t = 126$ s, è dato da $v(t) = 0.001302t^3 - 0.00029t^4 + 23.61t - 3.003$ (in piedi al secondo).

Usando questo modello, stimare i valori di massimo e di minimo assoluti dell'accelerazione della navicella tra l'istante del decollo e quello di sganciamento dei razzi propulsori.

Allegato O

Scaletta incontri plenari

Ottobre 2014

- f) Illustrazione e commento del Decreto Ministeriale e delle simulazioni ministeriali delle prove per l'Esame di Stato (ovviamente nella speranza ci siano entrambe le cose...).
- g) Presentazione e sintesi di quanto emerso negli incontri interprovinciali, con particolare riguardo a
 - motivazioni delle scelte nelle programmazioni;
 - motivazioni delle scelte per quanto riguarda le prove proposte.
- h) Revisione e raccolta delle prove proposte e accordi sulle modalità di testarle in classe e di condividerne i risultati.
- i) Sintesi e documento conclusivo dei lavori prodotti.
- j) Rilanci futuri?

Allegato P

Sintesi incontri plenari Parma (7 ottobre 2014) e Bologna (8 ottobre 2014) a cura di Achille Maffini

Gli incontri, tenutisi alla presenza del Prof. Bolondi, sono stati proposti con il seguente Ordine del Giorno:

- k) Illustrazione e commento del Decreto Ministeriale e delle simulazioni ministeriali delle prove per l'Esame di Stato (ovviamente nella speranza ci siano entrambe le cose...).
- l) Presentazione e sintesi di quanto emerso negli incontri interprovinciali, con particolare riguardo a
 - motivazioni delle scelte nelle programmazioni;
 - motivazioni delle scelte per quanto riguarda le prove proposte.
- m) Revisione e raccolta delle prove proposte e accordi sulle modalità di testarle in classe e di condividerne i risultati.
- n) Sintesi e documento conclusivo dei lavori prodotti.
- o) Rilanci futuri?

Purtroppo sul primo punto c'è poco da dire: il decreto (e tanto meno le auspiccate simulazioni) non è ancora uscito. Ci si è quindi limitati a leggere-commentare col Prof. Bolondi un report inviato da una collega che ha partecipato al seminario di Rovigo del 29-30 settembre scorso. Commentando la relazione sono emerse, come principali criticità, l'ambiguità di alcune 'definizioni' (cosa significa 'obbligatorio' o 'di base'? quali differenza tra i contenuti delle due tipologie?) o la mancanza di indicazioni (come valutare la prova se, come sembra, i quesiti obbligatori dovrebbero bastare per la sufficienza? Quale ruolo dovrebbero avere i diversi quesiti nella valutazioni? È pensabile una valutazione 'variabile' da quesito a quesito?). Tutte queste domande rimangono aperte (ad esempio, il Prof. Bolondi faceva notare come il termine 'obbligatorio' sia fuorviante e sarebbe più opportuna una dizione che sottolinei semplicemente cosa si deve fare) e l'auspicio è che oltre al decreto ci possa essere un impegno da parte di Matmedia per produrre una griglia come quella attualmente proposta per la valutazione della prova di Matematica in modo, quanto meno, di uniformare le richieste per la sufficienza. Nessuno, ovviamente si aspetta una griglia ministeriale, anche se tutti la auspiccherebbero.....

Sempre nel seminario di Rovigo è stato detto che dovrebbero essere prodotte e diffuse delle simulazioni di prove a gennaio e marzo. Già il condizionale induce al pessimismo; la tempistica, anche se rispettata, suscita invece, nei più, ironica rassegnazione.

In questo clima di generale incertezza, si ritiene comunque importante il lavoro svolto, sia in termini di confronto che di scambio di idee e vedute. Da questo punto di vista, anticipando l'ultimo punto, ho sottolineato come la costituzione di un gruppo numeroso e motivato che abbia scelto di confrontarsi e collaborare sia il reale valore aggiunto del lavoro di questi mesi. È auspicabile quindi che questo patrimonio umano non vada disperso e si possa, nei limiti del possibile, continuare questo tipo di collaborazione.

Anche l'analisi dei quesiti proposti dai vari gruppi provinciali (che ha occupato la seconda parte dell'incontro) ha costituito momenti di reale confronto su prassi didattiche e convinzioni su come ciascuno di noi ha inteso e declinato le Indicazioni Nazionali.

Brevemente sintetizzo/ricordo quanto emerso nei due incontri sulla discussione delle prove proposte.

- 1) La prima osservazione riguarda la struttura dei quesiti: qualcuno ha scelto forma articolate per i QO (quesiti obbligatori) e forme 'secche' per i QS (quesiti a scelta); altri articolando in più richieste sia i QO che i QS; altri una forma con una max 2 richieste sia nei QO che nei QS. Si pone quindi prioritariamente il problema di uniformare il format secondo uno standard comune.
- 2) Direi che tutti quesiti presentati hanno riscosso il consenso degli insegnanti presenti in termini di

contenuti proposti. Come detto, le maggiori difficoltà (e le conseguenti discussioni) hanno riguardato, ovviamente, la struttura vista la mancanza di indicazioni ufficiali su cui lavorare. A questo va aggiunto come alcune proposte siano state prodotte prima del convegno di Rovigo; ma anche quelle prodotte successivamente non hanno potuto avvalersi di indicazioni più chiare e precise circa la 'misura' da tenere sia in termini di contenuti che di numero di richieste.

- 3) Rispetto ai contenuti, in generale si è concordato nel dare un peso maggiore a quelli di analisi, sia nei quesiti obbligatori che in quelli a scelta; visto poi che le indicazioni date a Rovigo parlano di argomenti del quinto anno (e questo, faceva notare il Prof. Bolondi, con scarsa coerenza rispetto allo spirito con cui sono state redatte le Indicazioni Nazionali, nelle quali il quinto anno aveva più una valenza di orientamento), gli altri argomenti privilegiati dovrebbero essere la Geometria analitica dello spazio e le variabili aleatorie discrete e/o continue. Poiché poi la geometria analitica dello spazio rappresenta l'assoluta novità nel curriculum di matematica, **si auspica che i quesiti relativi a questo argomento non siano inseriti tra quelli obbligatori.** I percorsi didattici, infatti hanno sì preso atto delle Indicazioni Nazionali, ma non hanno ancora preso la necessaria pratica con gli stessi. Conviene quindi, in questa fase di transizione, poter lavorare sul pregresso per quanto riguarda le conoscenze di base.
- 4) Anche se i quesiti verteranno soprattutto sugli argomenti del quinto non si esclude che alcuni possano riguardare anche argomenti trattati in altri anni, se ritenuti legati a saperi imprescindibili o di base (come ad esempio il calcolo combinatorio o il calcolo delle probabilità).
- 5) Nelle discussioni degli incontri plenari, molto peso hanno avuto le considerazioni sulla prova d'esame (come era naturale e come, del resto, era l'obiettivo del progetto), mentre è passato più in secondo piano la discussione sul syllabus, se non a livello locale. Questo però è un altro fronte tutt'altro che trascurabile, perché potere discutere e valutare i vari materiali prodotti permetterebbe di avere un'idea piuttosto precisa su quali siano i punti nodali ritenuti da tutti imprescindibili e irrinunciabili in una formazione liceale. Tra l'altro, la proposta di un syllabus condiviso o condivisibile aiuterebbe a colmare l'attuale vuoto frutto anche, probabilmente, di diverse vedute da parte di alcune associazioni matematiche

Alla luce di queste considerazioni si propone per il futuro prossimo il seguente **percorso operativo**:

- 1) **Nei QO proporre due quesiti di analisi e non proporre quesiti di geometria analitica dello spazio. Nei QS proporre 3-4 quesiti di analisi, mentre negli altri 3-2 privilegiare soprattutto statistica e geometria analitica dello spazio.**
- 2) **Rivedere i quesiti proposti (sia QO che QS) prospettando per ciascuno 2 o al massimo 3 richieste (se si mettono 3 richieste, una di queste dovrebbe essere propedeutica ad un'altra o di raccordo tra le altre due. Anziché eliminare delle specifiche richieste ritenute importanti, si può ipotizzare di spezzare i quesiti proposti con molte richieste in uno o più quesiti di quello specifico tipo).**
- 3) **Indicare per ciascun quesito**
 - a) **le competenze richieste e/o le motivazioni delle scelte (vedi format di Ferrara e, in parte, di Parma);**
 - b) **il tempo presunto di svolgimento;**
 - c) **se lo si ritiene un quesito da inserire nei QO o nei QS;**
- 4) **La fonte del quesito se preso da libro di testo (indicando quale), prova d'esame, ecc.**

Questo lavoro di revisione andrebbe naturalmente fatto da chi ha proposto il singolo quesito. Invito pertanto i singoli colleghi o i coordinatori provinciali a spedirmi le modifiche secondo queste indicazioni. Sarà poi mia cura classificarli secondo due distinzioni: per argomento e per QO vs QS. Naturalmente chi volesse spedire quesiti nuovi soddisfacenti le indicazioni date può farlo!

Come termine, fisserei la fine di ottobre. Una volta assemblato il tutto, spedirò a tutti il lavoro così ottenuto, in modo che ciascuno si possa esprimere sul materiale prodotto, soprattutto in merito alla collocazione dei singoli quesiti tra QO e QS e alla tipologia delle richieste. In ogni caso, anche in questa fase di revisione, invito ciascuno a fare commenti o osservazioni.

Obiettivi:

- i) arrivare ad avere una banca-dati piuttosto nutrita a cui attingere per simulare delle prove e, conseguentemente, testare l'adequatezza del materiale;

- ii) diffondere il materiale sperando possa fare ‘tendenza’;
- iii) cercare di darvi visibilità anche attraverso iniziative quali quelle della rivista Archimede che prevede un numero speciale dedicato proprio al nuovo Esame di Stato.

Al termine di questa nota, non posso che rinnovare il ringraziamento a tutti coloro che hanno collaborato e partecipato al percorso; e questo malgrado le condizioni tutt’altro che incoraggianti...

Allegato Q

Quesiti proposti

Di seguito si riportano i quesiti proposti dai vari gruppi di lavoro nei vari incontri, alla luce delle revisioni apportate negli incontri plenari.

Le varie formulazioni di testi e richieste risente delle ‘diverse mani’ che vi hanno lavorato e sulle quali non sono state apportate modifiche o revisioni ‘uniformanti’ al fine di evidenziare le diverse concezioni e il diverso linguaggio dei proponenti.

Oltre alla possibile spendibilità in classe delle proposte fatte, è importante sottolineare come i vari quesiti, formulati sull’ipotesi (ricorrente fino a poco tempo fa) di tre quesiti obbligatori e di tre quesiti a scelta, costituiscano una modalità indiretta per vedere come gli insegnanti hanno declinato le Indicazioni Nazionali e quali debbano essere, secondo loro, le competenze matematiche al termine di un percorso liceale.

Quesiti obbligatori

Analisi

(A1) Data la famiglia di funzioni : $y = \frac{ax^3 - 5x^2 + 8x + 4}{bx^2 - 2x}$ con $a \in \mathfrak{R}$ e con $b \in \mathfrak{R}$ determinare:

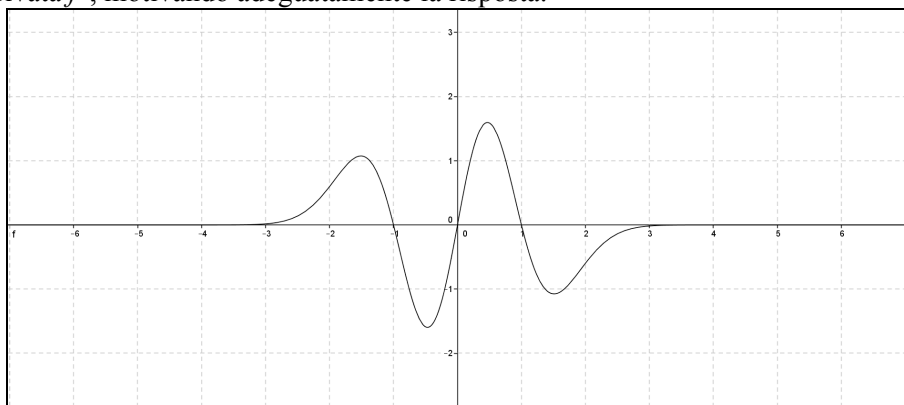
- g) la funzione il cui grafico ha un asintoto obliquo parallelo alla retta di equazione $2y - x = 0$ e per asintoto verticale la retta di equazione $2x = 1$;
- h) le funzioni i cui grafici hanno asintoto orizzontale;
- i) la funzione il cui grafico ha un asintoto orizzontale ed un asintoto verticale coincidente con la retta di equazione $x - 1 = 0$.

(A2) Data la funzione : $y = \frac{-5x^2 + 8x + 4}{x^2 - 2x}$

- a) studiare la continuità della funzione, classificandone gli eventuali punti di discontinuità;
- b) restringere e/o modificare il dominio della funzione in modo da ottenere una funzione continua;
- c) illustrare eventuali collegamenti tra studio degli asintoti e continuità di una funzione.

(A3) È assegnata la famiglia di funzioni reali a variabile reale f_k definite da $f_k(x) = x^2 e^{(1-kx^2)}$, con k parametro reale positivo.

- e) Una delle funzioni della famiglia data, che d'ora in poi sarà indicata con f , ha come derivata la funzione f' il cui grafico è mostrato in figura. Trovare il valore di k per il quale la corrispondente funzione ha come derivata f' , motivando adeguatamente la risposta.



- f) Verificato che il valore richiesto al punto b) è $k=1$, stabilire quanti sono i punti di flesso del grafico della funzione f e individuare intervalli di ampiezza 1 che li contengano.
- g) Dimostrare, facendo riferimento ad una proprietà della funzione f , che risulta:
$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

Competenze coinvolte:

- applicazioni del calcolo differenziale;
- lettura di un grafico;
- capacità di dedurre dal grafico le informazioni necessarie senza ricorrere a strumenti algebrici.

(A4) Presenta nel dettaglio i casi di discontinuità e di non derivabilità di una funzione reale di variabile reale.

Successivamente determina gli eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità della funzione definita a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & x < 0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0 \leq x < 1 \\ \ln x & x > 1 \end{cases}$$

Competenze coinvolte:

- Saper classificare e determinare i punti di discontinuità e di non derivabilità di una funzione
- Saper calcolare limiti di funzioni
- Saper applicare il limite notevole $\sin x / x$
- Saper calcolare derivate di funzioni elementari e non

Tempo previsto: 20 – 25 minuti

(A5) Data la funzione reale $f(x) = x^{2n} + 2x - 1$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$

- determina per quali valori di n la funzione risulta sempre crescente
- scelto un numero n che soddisfi (i), giustifica l'affermazione: "L'equazione $f(x) = 0$ ha una sola soluzione reale"
- verifica che tale soluzione è compresa nell'intervallo $[0; 1]$ e determinala, approssimata con due cifre decimali esatte, con un metodo iterativo a scelta.

Competenze coinvolte:

- Saper calcolare derivate di funzioni elementari
- Saper applicare il teorema degli zeri
- Saper applicare un metodo iterativo

Tempo previsto: 20 – 25 minuti

(A6) Disegna il grafico di una funzione $y = f(x)$ che soddisfi tutte le seguenti condizioni.

- Dominio = $]-\infty; -3[\cup]-3; 1[\cup]2; +\infty[$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1^-$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$.
- $f(0) = 0$, $f(2) = 2$.
- f è strettamente crescente per $x < -3$ e per $-3 < x \leq 0$; f è non crescente per $0 \leq x < 1$.

Ricava le seguenti informazioni sulla $f(x)$.

- Scrivi le equazioni degli eventuali asintoti verticali o orizzontali.
 - $f(x)$ può intersecare un suo asintoto orizzontale per $x < -3$? E per $x > 3$?
 - La disequazione $f(x) > 0$ ha soluzioni per $-3 < x < 1$? E per $-3 < x < 3$?
 - Si può calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$? Se sì, quanto vale?
-

(A7) Siano $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- Si scriva l'espressione analitica della funzione composta $g \circ f$.
- Si verifichi che è invertibile nel suo dominio.
- si calcoli la derivata della funzione $g \circ f$ inversa della funzione f , nel punto $x = 2$.

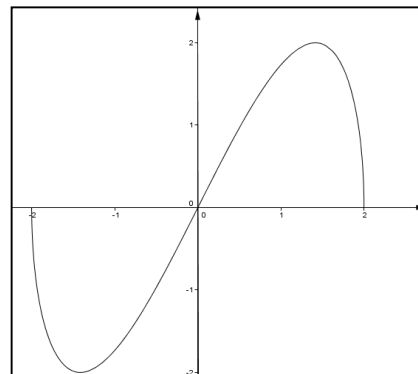
Competenze coinvolte:

- composizione di funzioni;
- riconoscimento funzioni invertibili;
- applicazione teorema derivazione funzione inversa.

(A8) A lato è disegnato il grafico Γ della funzione $f(x) =$

- Si calcolino il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$.
- Si dica se l'origine O è centro di simmetria per Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x .
- Si disegni la curva d'equazione $y^2 = x^2(4 - x^2)$ e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.

(Esame di Stato-Ordinamento 2014)



Competenze coinvolte:

- calcolo derivate; equazione tangente; significato goniometrico coefficiente angolare;
- riconoscimento e verifica di simmetrie notevoli; uso delle simmetrie per la rappresentazione di una curva; uso della simmetria per il calcolo di area;
- calcolo analitico di massimo e minimo di una funzione; impostazione di integrale definito per il calcolo di un'area;
- integrale definito

(A9) Sia

dove c è un numero reale.

- Tracciare la curva di equazione $y = (x - 1)^2 + 1$, $x \in [-1; 3]$ ed evidenzia sul tuo grafico l'area rappresentata dall'integrale $I(1)$.
- Senza calcolare $I(c)$, spiega perché $I(c) \geq 0$ per ogni valore di c .
- Calcola $I(c)$.
- Qual è valore minimo di $I(c)$ al variare di c ?

Competenze coinvolte:

- legame tra il quesito e un grafico richiesto
- significato geometrico di integrale definito;
- calcolo di integrale definito;
- calcolo derivata.

(A10) Un filo metallico di lunghezza l viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

- la somma delle due aree sia minima?
- la somma delle due aree sia massima?

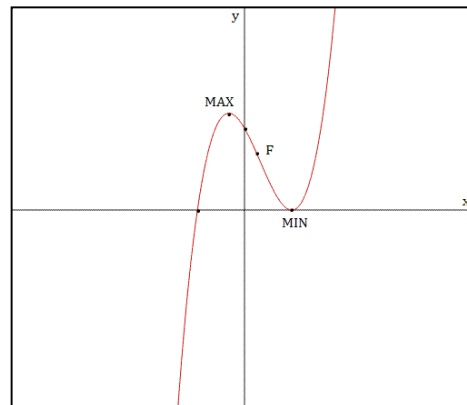
(Esame di Stato 2006– Ordinamento 200(Problema 1))

Competenze coinvolte:

- formalizzazione di un problema di ottimizzazione con scelta di incognita, limitazione e determinazione della funzione da massimizzare/minimizzare;
- determinazione di massimo e minimo di una funzione;
- competenze opzionali: applicazione dei teoremi su determinazione di massimi e minimi per via elementare

(A11) La funzione $y = f(x)$ disegnata in figura presenta un punto di massimo in $(-1,5)$, un punto di minimo in $(2,0)$, il flesso $F(\frac{1}{2}, 3)$ e due punti di intersezione con gli assi $(0,4)$, $(-2,0)$

- Individuare graficamente cosa rappresenta $\int_{-2}^{\frac{1}{2}} f(x) dx$
- Si deduca il grafico della $h(x) = \log f(x)$, motivando esaurientemente i passaggi.
- Si deduca il grafico della $f'(x)$, motivando esaurientemente i passaggi.



Competenze coinvolte:

- significato geometrico di integrale definito;
- capacità di lettura di un grafico ai fini di trarre informazioni per disegnarne altri;
- legame tra una funzione e la sua derivata.

(A12) In un sistema di assi cartesiani Oxy si disegni la circonferenza di diametro OA dove $A(2,0)$.

- Si scrivano le equazioni della semicirconferenza disegnata nel primo quadrante degli assi e della semiretta di origine O e che forma con il semiasse positivo delle x un angolo di $\frac{\pi}{6}$.
- Detto B l'ulteriore punto di intersezione tra la semiretta e la semicirconferenza, si calcoli l'area del triangolo mistilineo individuato dall'angolo OAB e dalla semicirconferenza (senza fare uso di integrali)
- Si calcoli il volume del solido che si ottiene ruotando il segmento circolare OB attorno all'asse x .

Competenze coinvolte:

- dalla geometria analitica: equazione circonferenza; equazione retta; conoscenza significato goniometrico coefficiente angolare;
- scomposizione di figure piane in somme/differenze di aree note; calcolo aree triangolo e settore circolare;
- applicazione integrale definito per calcolo volume solido di rotazione.

(A13) Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri affinché sia minima la quantità di latta necessaria per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta)

Competenze coinvolte:

- comprensione degli strumenti geometrici di base per lo studio dei fenomeni reali;
- determinazione analitica del massimo e del minimo;
- calcolo della derivata.

(A14) Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:

- a) area massima e perimetro massimo;
- b) area massima e perimetro minimo;
- c) area minima e perimetro massimo;
- d) area minima e perimetro minimo.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

Competenze coinvolte:

- utilizzo conoscenze geometriche di base;
- risoluzione di problemi di max o min attraverso la geometria sintetica e/o l'analisi.

(A15) Un serbatoio alto 10 m ha la forma di un cilindro equilatero. Per proteggerlo si costruisce un tendone avente la forma di cono circolare retto circoscritto al cilindro.

- a) Poiché l'ambiente va riscaldato, determinare le dimensioni del cono affinché il suo volume sia minimo ed esprimere tale volume minimo in m^3 e in litri.
- b) L'impianto di riscaldamento funziona a gas. Se con 1 m^3 di gas si riscaldano (al giorno) 15 m^3 di ambiente e se il gas costa 0,40 euro/ m^3 , determinare quanto costa riscaldare ogni giorno la parte del tendone non occupata dal serbatoio.

Competenze coinvolte:

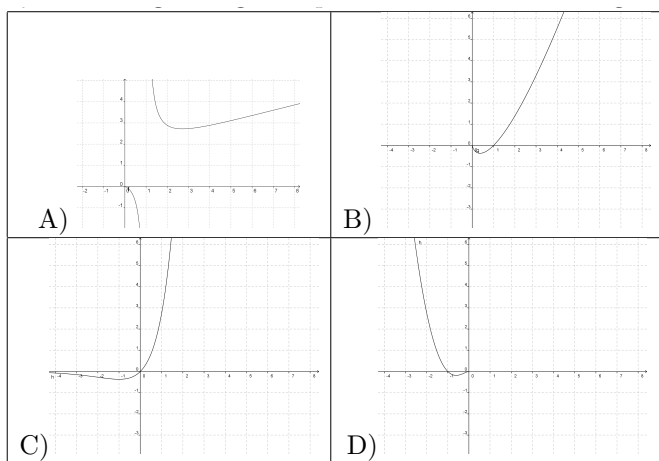
- Saper ricavare, a partire da considerazioni geometriche, la funzione 'Volume'.
- Saper affrontare e risolvere un problema di ottimizzazione con un'adeguata e corretta impostazione.
- Saper riconoscere gli elementi necessari per la gestione di dati 'di realtà'.

(A16). È data la funzione definita su \mathbf{R} $f(x) = \frac{x}{\log x}$.

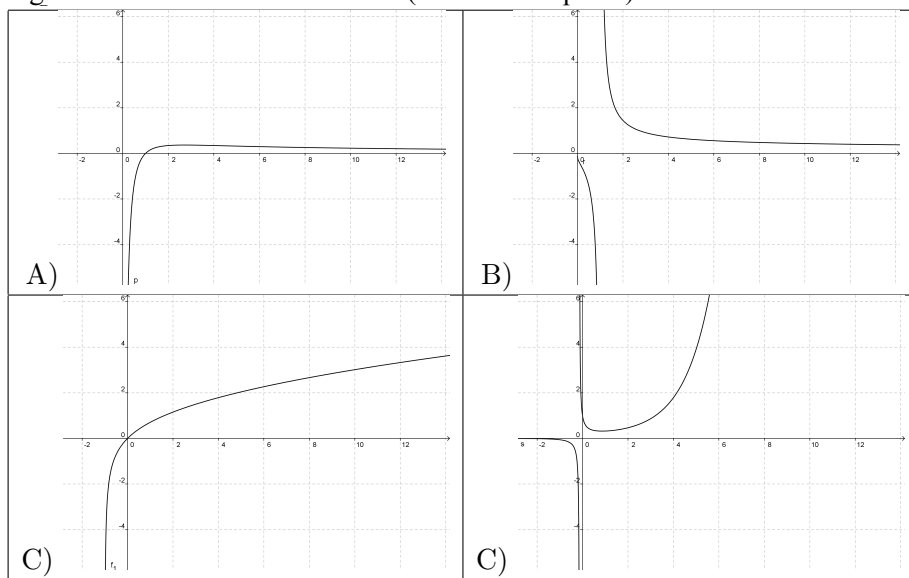
- Calcolare i $a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ $b) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ $c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- I tre limiti calcolati ci portano ad affermare che (motivare le risposte date)

| | | |
|--|---|---|
| La retta $x=0$ è asintoto verticale | V | F |
| La retta $x=1$ è asintoto verticale | V | F |
| Il punto $(0; 0)$ è un punto del grafico di $f(x)$ | V | F |
| La retta $y=0$ è un asintoto orizzontale | V | F |
| Non ci sono asintoti orizzontali | V | F |

- Determinare per quali valori di x si hanno rette tangenti al grafico della funzione di coefficiente angolare $m=-1$.
- Individuare il punto di massimo relativo del grafico della funzione.
- Quale dei seguenti grafici può essere considerato un grafo di $f(x)$? Motiva la risposta.



- Il grafico della funzione inversa è (motiva la risposta)



- Calcolare l'area compresa tra il grafico della funzione $1/f(x)$ e le rette $x=1$ e $x=e$.

Analisi applicata alla fisica

(F1) Un corpo si muove lungo la retta Ox secondo la legge oraria $s = t^3 - 2t$, dove s è espresso in metri e t in secondi.

Dopo aver rappresentato graficamente tale moto, per valori di tempo positivi, determinare:

- a) la velocità e l'accelerazione in ogni istante e darne una rappresentazione grafica;
- b) la posizione, la velocità e l'accelerazione per $t = 1\text{ s}$ e $t = 4\text{ s}$;
- c) la velocità e l'accelerazione medie tra $t = 2\text{ s}$ e $t = 3\text{ s}$.

(F2) Un moto oscillatorio smorzato è descritto dalla legge oraria $s(t) = e^{-t} \sin 2t$.

Dopo aver stabilito il valore dell'elongazione agli istanti $t = 0; 2; 10$ e per $x \rightarrow +\infty$, determina le funzioni $v(t)$ e $a(t)$ in funzione del tempo.

(Bergamini-Zanichelli)

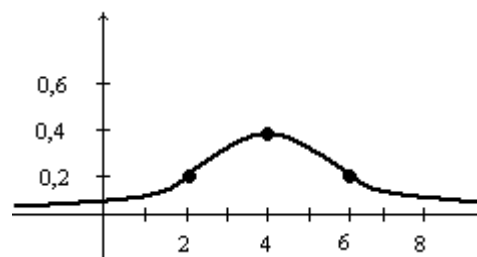
(F3) Sia $a(t) = e^{2t} + 2$ la legge con cui varia nel tempo l'accelerazione in m/s^2 di un punto materiale P che si muove su di una retta. Determina la legge oraria del moto, sapendo che $v_0 = 2\text{ m/s}$ e $s_0 = 5\text{ m}$.

(Bergamini – Zanichelli)

Statistica

(S1) Il grafico in figura, dove sono evidenziati il punto di massimo e i due punti di flesso, rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria X , avente distribuzione normale. Utilizzando le tavole di Sheppard determinare:

- il valor medio e la devianza standard di X ;
- la probabilità che $X \leq 6$ e quella che sia $X \geq 6$;
- la probabilità che sia $5 \leq X \leq 8$.



Competenze coinvolte:

- saper interpretare un grafico e ricavare da esso informazioni;
- saper standardizzare una variabile aleatoria;
- saper utilizzare le tavole di Sheppard.

Tempo previsto: 15 minuti

(S2) Da una statistica in una scuola è risultato che lo 0,6% degli studenti possiede più di 100 libri di narrativa. In un gruppo di 20 studenti, studia la variabile casuale X = «numero delle persone che posseggono più di 100 libri» e determina il valor medio, la varianza e la deviazione standard. Determina inoltre la probabilità che il numero di studenti con più di 100 libri sia più di 1 nel gruppo dei 20 studenti considerati.

(S3) In un noto gioco televisivo un concorrente ha un “capitale iniziale” di 32000€ e gli vengono poste 5 domande del tipo Vero/Falso cui il concorrente è costretto a rispondere a caso: ogni volta che sbaglia il capitale viene dimezzato mentre se risponde correttamente resta invariato; sia X il capitale con cui si ritrova il concorrente al termine delle cinque domande. Determinate:

- qual è la probabilità che il concorrente risponda sempre in modo esatto;
- il numero Y di risposte corrette si può esprimere con una variabile aleatoria binomiale: perché? Determinare la distribuzione di Y e la sua moda;
- Determinare la distribuzione della variabile casuale X : mediamente quanto rimane al concorrente?

Competenze coinvolte:

- riconoscimento eventi indipendenti;
 - applicazione teorema probabilità composta;
 - riconoscimento della variabile aleatoria binomiale e determinazione della sua distribuzione e moda; determinazione della distribuzione di una variabile aleatoria discreta;
 - calcolo media e moda di variabili aleatorie
-

(S4) In un noto gioco televisivo un concorrente ha un “capitale iniziale” di 32000€ e gli vengono poste 5 domande del tipo Vero/Falso cui il concorrente è costretto a rispondere a caso: ogni volta che sbaglia il capitale viene dimezzato mentre se risponde correttamente resta invariato; sia X il capitale con cui si ritrova il concorrente al termine delle cinque domande.

- Determinare la distribuzione della variabile casuale X : mediamente quanto rimane al concorrente?
- considerare i seguenti eventi
 - E : “il concorrente risponde correttamente ad esattamente una domanda”
 - F : “il concorrente risponde correttamente alla prima domanda”

e calcolare la probabilità di E a condizione di F e di F a condizione di E verificando che si ottiene $P(F/E)=1/5$, $P(E/F)=1/16$; E ed F sono indipendenti? Perché?

- c) Alberto e Barbara scommettono sul risultato del concorrente: Alberto darà a Barbara 5 euro se ci saranno almeno due risposte corrette. Affinché il gioco sia equo quanto deve dare Barbara ad Alberto in caso contrario?

Competenze coinvolte:

- riconoscimento eventi indipendenti;
 - applicazione teorema probabilità composta;
 - determinazione della distribuzione di una variabile aleatoria discreta;
 - calcolo media di variabili aleatorie; calcolo di probabilità condizionate; riconoscimento di giochi equi
-

(S5) Una banca stabilisce, da un'indagine statistica dei conti correnti dei suoi clienti, che il deposito medio sui conti correnti varia da un minimo di – 2000 euro ad un massimo non superiore ai 6000 euro, secondo una variabile aleatoria continua X , la cui densità di probabilità è espressa da una funzione del tipo

$$f(x) = \begin{cases} k \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{4} \right) & \text{se } -2 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 3 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale e i valori della variabile indipendente x sono espressi in migliaia di euro.

Dopo aver dimostrato che k vale $1/32$, si determini:

- e) qual è la cifra che compare con maggiore probabilità sui conti correnti della banca;
- f) qual è la probabilità di avere dei depositi compresi tra 0 e 2000 euro;
- g) qual è il deposito medio dei conti correnti di quella banca.

Competenze coinvolte:

- Conoscere le caratteristiche di una variabile aleatoria continua.
 - Saper determinare il massimo di una funzione.
 - Conoscere il concetto di valor medio di una variabile aleatoria continua e saperlo applicare.
 - Saper calcolare semplici integrali definiti.
-

Geometria analitica dello spazio

(G1) Considera i tre piani:

$$\alpha: x + y - z + 1 = 0$$

$$\beta: 2x + y + z - 1 = 0$$

$$\gamma: x + 2y - 3z + 5 = 0$$

- c) Verifica che i due piani α e β sono secanti e determina una rappresentazione parametrica della retta r che costituisce la loro intersezione.
- d) Deduci da che cosa è costituita l'intersezione dei tre piani α , β e γ .
-

(G2) (1) Data la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2z = 0$ il suo centro è

$$(4; 0; -1) \quad (-8; 0; 2) \quad (16; 0; -4) \quad (-1; 4; 0)$$

(2) Il suo raggio è $\sqrt{8} \quad \sqrt{17} \quad 8 \quad 17$

(3) sia dato il piano $\pi: x + y + 1 = 0$; allora l'intersezione tra il piano π e la sfera è

A) Il vuoto.

B) Un punto di coordinate $(-8; 0; 2)$.

C) Una circonferenza di centro $(3/2; -5/2; -1)$ e raggio $3/\sqrt{2}$.

D) Non è una circonferenza ma un'ellisse.

Motivare tutte le risposte date

Quesiti a scelta

Analisi

(As1) Data la funzione $F(x) = \int_2^x \sqrt[3]{t} \cdot e^{-t} dt$, senza trovare la sua espressione analitica, giustificare perché il dominio è \mathbb{R} .

- f) Calcolare e studiare la derivata prima. La funzione è derivabile in \mathbb{R} ?
 - g) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto di ascissa 2.
 - h) Calcolare $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x)}{x^2 - 4}$.
-

(As2) Sul tavolo della cucina che si trova ad una temperatura di 20°C , una tazza di tè, inizialmente alla temperatura di 90°C , dopo 10 minuti si trova alla temperatura di 70°C gradi.

- d) Sapendo che la funzione che individua la temperatura T del tè è al variare del tempo t soddisfa la condizione $T'(t) = -\alpha(T(t) - T_0)$ (essendo α un parametro reale positivo) determina la legge di raffreddamento della tazza di tè e illustrala anche graficamente.
- e) In quanto tempo la temperatura scenderà a 30°C ?
- f) In quanto tempo la temperatura del tè sarà di 20°C ?

Motiva adeguatamente le tue risposte (considerando trascurabile l'innalzamento della temperatura della stanza).

(As3) Un corpo sferico di massa 100 g viene lasciato cadere in un mezzo viscoso che oppone una forza direttamente proporzionale alla velocità del corpo secondo un coefficiente $\lambda = 0,2\text{ N s/m}$.

Determinare:

- d) l'espressione analitica della velocità in funzione del tempo;
 - e) la velocità del corpo dopo 2 secondi;
 - f) la sua velocità limite.
-

(As4) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua su \mathbb{R} , tale che:

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x) dx = -5$$

Calcolare:

$$\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad \int_2^3 f\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad \int_0^1 f(2x) dx$$

(Esame di Stato A.S. 1999/00 - Ordinamento (Problema 1 (a)))

(As5) Dati $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, la funzione reale $f(x)$ di variabile reale, continua su \mathbb{R} , è tale che:

$$\int_0^2 f(x) dx = a \quad \text{e} \quad \int_0^6 f(x) dx = b$$

Determinare, se esistono i valori di a e b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x) dx = \ln 2 \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(2x) dx = \ln 4$$

(Esame di Stato A.S. 2001/02 Ordinamento (quesito 10))

Competenze coinvolte:

- Saper sostituire una variabile nell'integrale definito
- Saper applicare la proprietà di additività dell'integrale definito

Tempo previsto: 15 minuti

(As6) La concentrazione C di un antibiotico nel sangue dopo un tempo t dall'assunzione è data dalla funzione

$$C(t) = \frac{5t}{1 + \left(\frac{t}{6}\right)^2}$$

nella quale $k > 0$ è un parametro dipendente da condizioni fisiche. Determinare il valore di k , se la massima concentrazione si raggiunge dopo 6 ore.

(IR Leaving certificate Examination, 1995)

Competenze coinvolte:

- Stabilire la relazione tra punti di minimo o di massimo e derivata nulla della funzione

Tempo previsto: 20 – 25 minuti

(As7) Tracciare il grafico del tratto di curva $y = \sqrt{x^2 - 9}$ tra $x = 3$ e $x = 6$. Senza cercare di calcolare l'integrale, dedurre che

$$4 < \int_3^6 \sqrt{x^2 - 9} dx < 3\sqrt{3}$$

spiegando il ragionamento seguito per dare la risposta.

Competenze coinvolte:

- Disegnare con buona approssimazione il grafico di una funzione
- Definire l'area sottesa a un grafico

Tempo previsto: 20 – 25 minuti

(As8) Supponi di percorrere in automobile un tratto di autostrada di lunghezza 60 km in un'ora esatta. Spiega perché il teorema di Lagrange garantisce che il tachimetro indichi, almeno una volta, esattamente 60 km/h. Mostra, attraverso un appropriato controesempio, che la tesi del teorema di Lagrange non è valida qualora non sia soddisfatta l'ipotesi di derivabilità della funzione all'interno dell'intervallo considerato. Facendo nuovamente riferimento al caso pratico citato in precedenza, è realistico ipotizzare che la funzione che associa al tempo la posizione dell'auto abbia punti di non derivabilità? Perché?

(As9) Considera un serbatoio cilindrico la cui base abbia area 1 m^2 e indica con $h(t)$ l'altezza in metri del liquido in esso contenuto al tempo t (espresso in s). Supponi che il serbatoio sia alimentato da una condotta e che l'afflusso (espresso in m^3/s) di liquido sia espresso in funzione del tempo da $f(t)$. Qual è il legame tra

$h(t)$ e $f(t)$? Enuncia il teorema corrispondente del calcolo differenziale. Sotto condizioni realistiche, $h(t)$ può essere discontinua?

(As10) Dimostrare che l'equazione $x^3 - 7x^2 + 20x - \sqrt{2} = 0$ ha esattamente una soluzione reale nell'intervallo $]0;1[$. Trovare poi un valore approssimato alla seconda cifra decimale della soluzione con un metodo a scelta.

Competenze coinvolte:

- applicazione teorema esistenza degli zeri;
 - applicazione di uno dei teoremi di unicità delle radici;
 - applicazione di un metodo iterativo per l'approssimazione dello zero di una funzione;
 - uso corretto calcolatrice
-

(As11) Determinare i valori dei parametri reali a, b in modo che risulti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0$$

Competenze coinvolte:

- riconoscere e saper risolvere le forme indeterminate dei limiti
 - capacità di gestire il raggiungimento di un risultato attraverso i valori di parametri.
-

(As12) Enunciare il teorema del valor medio o di Lagrange illustrandone il legame con il teorema di Rolle e le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve

La curva $(y+1)^2 = x^2$ passa per i punti $(1;0)$ e $(-1;0)$. Vale il teorema di Rolle nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$?

Competenze coinvolte:

- applicazione dei procedimenti caratteristici del pensiero matematico: deduzione, generalizzazione, dimostrazione (naturalmente con conoscenza dei contenuti specifici);
 - applicazione del teorema di Rolle.
-

(As13) Si consideri la funzione $f(x) = \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$

Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \rightarrow +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hôpital

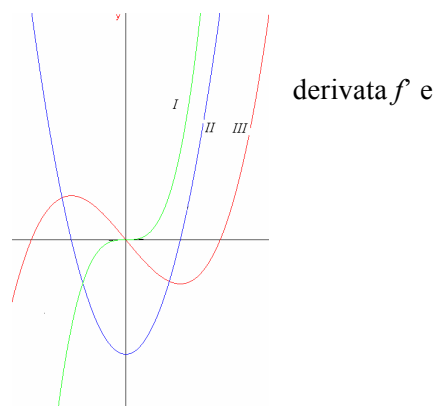
Competenze coinvolte:

- andamento della funzione $y = \sin x$ all'infinito
 - utilizzo dei teoremi sui limiti e del teorema De l'Hopital.
-

(As14) Nella figura, denotati con I, II, III, sono disegnati tre grafici.

Uno di essi è il grafico di una funzione f , un altro è quello della l'altro ancora di f' . Quali fra le seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

| | | | |
|--|-----|------|-------|
| | f | f' | f'' |
|--|-----|------|-------|



| | | | |
|----|-----|-----|-----|
| A) | I | II | III |
| B) | I | III | II |
| C) | II | III | I |
| D) | III | II | I |
| E) | III | I | II |

(Esame di Stato 2011 – Corso di Ordinamento (Quesito 10))

Competenze coinvolte:

- lettura di grafici e delle caratteristiche salienti;
- applicazione del teorema di Lagrange e dei suoi corollari per individuare l'alternativa plausibile

(As15) Il telescopio spaziale Hubble fu posizionato il 24 aprile del 1990 dalla navicella spaziale Discovery. Un modello per la velocità della navicella durante questa missione, dal decollo in $t = 0$ allo sgancio dei razzi propulsori in $t = 126$ s, è dato da $v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.003$ (in piedi al secondo).

Usando questo modello, stimare i valori di massimo e di minimo assoluti dell'accelerazione della navicella tra l'istante del decollo e quello di sganciamento dei razzi propulsori.

Competenze coinvolte:

- comprensione degli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici;
- applicazione dei vari significati fisici della derivata;
- calcolo della derivata;
- determinazione analitica del massimo e del minimo

(As16) Sia $I(c) = \int_0^1 ((x-c)^2 + c^2) dx$ essendo c è un numero reale.

d) Calcola $I(c)$.

e) Qual è valore minimo di $I(c)$ al variare di c ?

f) Qual è il valore massimo di $I(\sin \theta)$ al variare di θ ?

Competenze coinvolte:

- calcolo di integrale definito ;
- calcolo derivata
- cambio di parametro con ulteriore limitazione

(As17) Data la funzione $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}} - 2^{\frac{1}{x^2+x-1}}$; dire se la tangente alla curva $y = f(x)$ nel unto di ascissa $x=-1$ forma con l'asse x un angolo maggiore o minore di $\pi/4$.

Competenze coinvolte:

- calcolo derivata;
- applicazione significato geometrico derivata;
- applicazione significato goniometrico coefficiente angolare.

(As18) Studiare la funzione reale di variabile reale di espressione analitica $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ e se rappresenti il grafico γ riferito a un sistema cartesiano ortogonale Oxy, evidenziando in particolare la presenza di eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità.

Competenze coinvolte:

- saper classificare e determinare i punti di discontinuità e di non derivabilità di una funzione;
- saper portare a termine uno studio di funzione;
- saper tracciare il grafico di una funzione.

Tempo previsto: 45 minuti

(As19) Data la curva di equazione $y = \sqrt{x} \ln x$

- a) calcolare l'area della regione di piano delimitata da γ e dall'asse delle ascisse nell'intervallo $[1; e]$.
- b) Indicati rispettivamente con N e con F i punti in cui ha il minimo e il flesso, calcolare il volume del solido che ha per base il triangolo ONF e le cui sezioni perpendicolari al piano del triangolo e al suo lato OF sono dei quadrati.

Competenze coinvolte:

- saper calcolare l'area di un dominio piano;
- saper risolvere un integrale per parti;
- saper calcolare il volume di un solido "a fette".

Tempo previsto: 30 minuti

(As20) Una cisterna per l'acqua ha la forma di un cono circolare rovesciato, con raggio di base due metri e altezza 4 metri. Sapendo che la cisterna si riempie di acqua ad una velocità di $2 \text{ m}^3/\text{min}$, trovare la velocità a cui il livello dell'acqua sta salendo quando l'altezza dell'acqua è 3 m .

Competenze coinvolte:

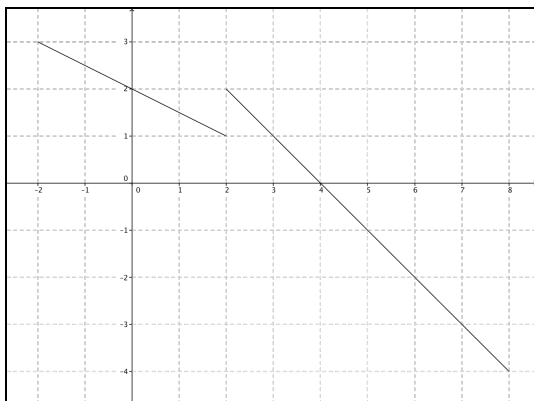
- comprensione degli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici;
 - applicazione dei vari significati fisici della derivata;
 - calcolo della derivata
-

(As21) È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in metri e radianti). Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W .

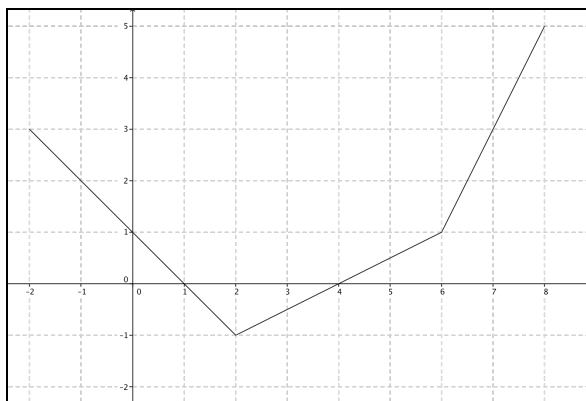
Competenze coinvolte:

- costruire una figura solida attraverso sezioni piane
 - utilizzo della definizione di integrale come sommatoria
 - calcolo di integrale di funzioni circolari
-

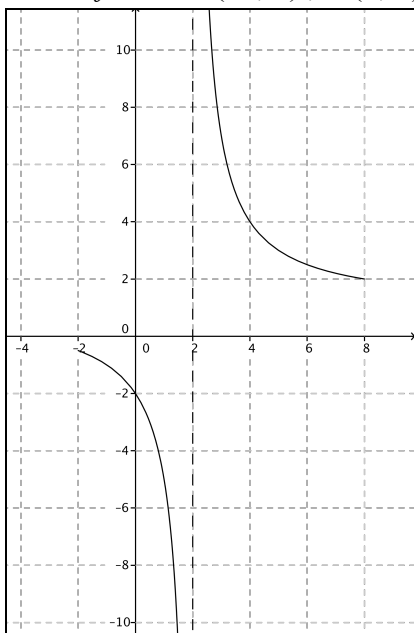
(As22) Nelle sottostanti figure sono riportati i grafici delle derivate di quattro funzioni f , g , h e k continue nell'intervallo $[-2; 8]$ e le coordinate dei punti A e B che ne delimitano i rispettivi grafici.



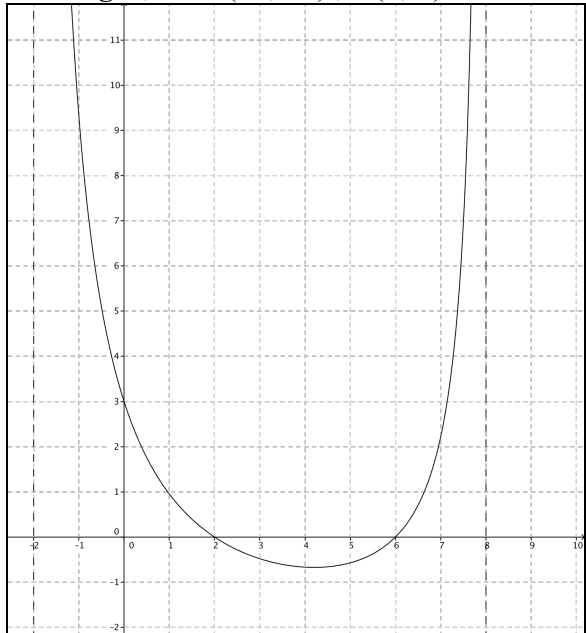
f' ; $A(-2; 3)$, $B(8; 5)$



g' ; $A(-2; -4)$, $B(8; 6)$



h' ; $A(-2; 0)$, $B(8; 3)$



k' ; $A(-2; -12)$, $B(8; 18)$

- Determinare quali tra le funzioni proposte soddisfano nell'intervallo $[-2; 8]$ le ipotesi del teorema di Lagrange e, nel caso, determinare graficamente gli eventuali valori garantiti dalla tesi.
- Nel caso le funzioni non soddisfino le ipotesi del teorema di Lagrange, se ne classifichino gli eventuali punti singolari.

Competenze coinvolte:

- Saper leggere il grafico della derivata prima di una funzione e dedurne delle informazioni relativamente al grafico della funzione.
- Conoscere il teorema di Lagrange e saperlo applicare.
- Conoscere il concetto di derivabilità e saperlo dedurre graficamente.
- Sapere le condizioni legate alla classificazione dei punti singolari.

(As23) È data la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n - \frac{4}{15} \end{cases}$$

e la successione

$$b_n = 3a_n + 1$$

- Dimostrare che la successione b_n è una progressione geometrica di ragione $1/5$.
- Esprimere le successioni b_n e a_n in funzione di n .

c) Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

d) Discutere la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$.

Analisi applicata alla fisica

(Fs1) In un moto armonico la variazione della posizione di un punto nel tempo, è descritta dalla funzione elongazione : $x(t) = A \cos \omega t$, dove A rappresenta l'ampiezza e ω la “pulsazione” del moto. Definire il grafico, fissati in modo arbitrario A e ω .

Utilizzando le definizioni di velocità istantanea $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ e di accelerazione istantanea $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, verificare che $a = -\omega^2 x$, illustrando in modo esaustivo l'operatore matematico utilizzato.

(Fs2) Una particella si muove lungo una retta con la seguente equazione oraria $s(t) = te^{-t}$, con $t \geq 0$.

Dopo aver rappresentato il grafico di $s(t)$, rispondere in modo esauriente alle seguenti questioni:

- in quale istante la particella raggiunge la distanza massima dal punto di partenza?
- come varia il verso della velocità nel corso del tempo?
- calcola velocità ed accelerazione negli istanti $t_1 = 1$ e $t_2 = 3$.

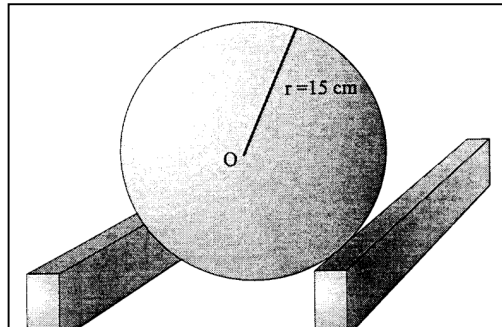
(Bergamini – Zanichelli)

(Fs3) In un circuito in moto rispetto ad un campo magnetico B , la forza elettromotrice varia al variare del tempo secondo la legge $fem = -3t^2 + 2t$, dove fem è espressa in volt e t in secondi. Calcola il flusso del campo magnetico B all'istante $t = 4$ s, sapendo che all'istante $t = 0$ s il flusso vale... $\phi = 0$ Wb. (Utilizzare la legge di Faraday-Neumann per la quale $fem(t) = -\phi'(t)$)

(Bergamini – Zanichelli)

Geometria solida e geometria analitica dello spazio

(Gs1) Una sfera di raggio $r = 15$ cm è appoggiata su due binari distanti tra loro 24 cm come in figura. La sfera effettua una rotazione completa: Determinare, motivando in modo esauriente il procedimento seguito, di quanto avanza sui binari.



(Gs2) Considerare la seguente figura

- c) Si chiedono Le coordinate di D affinché $ABCD$ sia un parallelogramma
d) L'area di questo parallelogramma

(Gs3) Nello spazio euclideo tridimensionale dotato di riferimento cartesiano sono assegnati i piani di equazioni

$$\alpha : x + 2y + kz = k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\beta : 2x + 4y + (3k - 1)z = 4$$

- d) Si determini la reciproca posizione di α e β per $k = 1$
e) Si determini quindi la posizione dei due piani in dipendenza di k
f) Esiste un k reale per il quale i due piani sono perpendicolari?

Competenze coinvolte:

- Rappresentare un punto dello spazio in un riferimento cartesiano tridimensionale
- Determinare la distanza tra due punti nello spazio
- Stabilire quando due piani sono paralleli e/o perpendicolari

Tempo previsto: 20 – 25 minuti

(Gs4) Nello spazio, dotato di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, sono dati i punti $A(2;-2;1)$ e $B(0;2;-3)$ e i piani α e β rispettivamente di equazioni $x+2y+z+2=0$ e $x+z-6=0$.

- 1) Dopo aver descritto le possibili posizioni di due rette nello spazio, stabilire la posizione reciproca delle rette r , passante per i punti A e B , ed s , intersezione dei piani α e β .
- 2) Nel caso in cui r, s siano complanari, determinare l'equazione del piano che le contiene.

(Gs5) Nello spazio, dotato di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, sono dati i punti $A(2;-2;1)$ e $B(0;2;-3)$ e i piani α e β rispettivamente di equazioni $x+2y+z+2=0$ e $x+z-6=0$.

- e) Determinare l'equazione del piano γ , luogo dei punti equidistanti da A e da B , verificando che risulta $x-2y+2z+1=0$.
- f) Dimostrare che l'intersezione fra la sfera S , di centro B e raggio 5, e il piano γ è una circonferenza di cui si chiede il centro e raggio.

Competenze coinvolte

- Capacità di visualizzare nello spazio
- Gestione dal punto di vista analitico delle equazioni di retta, piano, sfera nello spazio e delle condizioni di parallelismo e perpendicolarità

(Gs6) Dati i piani $\alpha : 2x - y + 3z - 1 = 0$ $\beta : x + 2y - 4 = 0$ e il punto $A(1;-1;-2)$, rispondi ai seguenti quesiti:

- a) verifica che i due piani sono perpendicolari;
- b) stabilisci quale delle due seguenti è l'equazione parametrica della retta r intersezione dei due piani:

$$I : \begin{cases} x = -6t + 6 \\ y = 3t - 1 \\ z = 5t - 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad II : \begin{cases} x = -t + 6 \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- c) Verifica che A non appartiene né al piano α , né al piano β : scrivi l'equazione della superficie sferica di centro A e tangente al piano α .

Competenze coinvolte:

- Rappresentare un punto dello spazio in un riferimento cartesiano tridimensionale
- Stabilire quando due piani sono perpendicolari
- Saper determinare l'equazione parametrica di una retta
- Saper determinare la distanza di un punto da un piano

Tempo previsto: 30 minuti

(Gs7) Sono dati i piani α e β di equazioni rispettivamente $x-2y+3z+3=0$ e $2x+y-z+3=0$ e il punto A di equazioni parametriche $(2k-1; 3-k; -k)$, con $k \in \mathbf{R}$.

- a) Dopo aver dimostrato che i piani sono incidenti, si determinino i valori di k per il quali i corrispondenti punti A_1 e A_2 appartengono rispettivamente al piano α e al piano β ;
- b) dopo aver trovato le equazioni della retta A_1A_2 e della retta ottenuta dall'intersezione dei due piani, si stabilisca (anche utilizzando il risultato ottenuto al punto precedente) la posizione reciproca delle due rette.

Competenze coinvolte:

- Saper riconoscere la posizione reciproca di due piani e di due rette nello spazio.
 - Saper interpretare analiticamente la condizione di appartenenza.
 - Saper determinare l'equazione di una retta nello spazio.
-

(Gs8) Si determini l'equazione della superficie sferica che interseca il piano Oxy formando la circonferenza $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ e il cui centro è un punto di quota -5.

Competenze coinvolte:

- applicazione nozioni di geometria analitica nello spazio.
-

Statistica

(Ss1) Per l'acquisto di un'immobile, l'offerta può variare tra 0 e 3 milioni di euro ed è considerata una variabile aleatoria continua X . E' data la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} c(9 - x^2) & \text{se } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 3 \end{cases} \quad \text{dove } c \text{ è un parametro reale.}$$

- Verificato che per $c = \frac{1}{18}$ si ottiene una funzione densità di probabilità, ricavare la funzione di ripartizione $F(x)$.
- Utilizzare la funzione F per determinare la probabilità di perdere l'acquisto con un'offerta massima di 1 milione di euro.
- Verificare che con un'offerta compresa fra 2,1 e 2,2 milioni di euro si ha la probabilità del 90% di aggiudicarsi l'immobile.

Competenze coinvolte:

- Significato della funzione densità di probabilità e della funzione di ripartizione
 - Semplici applicazioni del calcolo integrale e del teorema degli zeri
-

(Ss2) Si sono svolte alcune analisi statistiche sugli incidenti stradali dovuti ad abuso di alcool. Si è stabilito che i conducenti delle auto coinvolte negli incidenti, aventi massimo 40 anni, cui è stata attribuita la colpa di un incidente hanno un'età ben interpretata da una variabile aleatoria di densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^2} & \text{se } 18 \leq x \leq 40 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- determina k
- determina media e varianza
- scelto a caso un conducente di cui sopra, qual è la probabilità che abbia meno di 25 anni? E che ne abbia più di 30.

Competenze coinvolte:

- Conoscere e saper applicare le formule di media e di varianza di una variabile aleatoria continua
- Saper calcolare integrali di funzioni elementari

Tempo previsto: 20 – 25 minuti

(Ss3) La distribuzione di Poisson descrive molto bene il conteggio delle disintegrazioni in un campione di nuclidi radioattivi se il campione è sufficientemente numeroso.

Un campione radioattivo contenga $2 \cdot 10^{10}$ nuclidi ciascuno dei quali ha probabilità $p = 10^{-10}$ di decadere in un secondo.

Calcolare:

- il numero medio atteso di decadimenti in un secondo;
- la probabilità di osservare 0, 1, 2, 3 e 4 decadimenti in un secondo;
- la probabilità di osservare più 4 decadimenti in un secondo.

(Maturità sperimentale PNI, sessione suppletiva 1997)

Competenze coinvolte:

- distinguere tra distribuzioni discrete e distribuzioni continue di probabilità;

- valutare la probabilità di un evento che si comporti secondo il modello della distribuzione di Poisson.

Tempo previsto: 15 minuti

(Ss4) Andrea e Paolo praticano il tiro al piattello. Per ogni piattello lanciato, comincia Andrea sparando un singolo colpo: se Andrea colpisce il piattello, Paolo non spara, se Andrea non lo colpisce, allora spara un colpo o Paolo. La probabilità che con un colpo Andrea colpisca il bersaglio è del 75%, la probabilità che Paolo colpisca il bersaglio è del 60%. Vengono lanciati 5 piattelli.

Sia X la variabile aleatoria che conta quante volte Paolo spara. Determinare il range di X e la sua media. Determinare la probabilità dei seguenti eventi:

A: "Paolo non spara mai"

B: "Paolo colpisce il bersaglio una sola volta, sapendo che spara tre volte"

Competenze coinvolte:

- riconoscere la variabile aleatoria binomiale e determinare la sua distribuzione e media;
 - calcolo di probabilità condizionate;
 - applicazione del teorema della probabilità composta.
-

Varie

Quesiti su argomenti che pur non facendo parte del programma dell'ultimo anno si ritiene possano riguardare competenze di base da valutare.

(la s dopo la V sta ad indicare che il quesito è proposto tra quelli a scelta)

Probabilità

(P1) Si hanno tre urne le cui composizioni sono:

H1 = 8 palline rosse e 4 palline verdi. H2 = 6 palline rosse e 6 palline verdi. H3 = 8 palline rosse e 4 palline verdi. Per decidere da quale urna estrarre una pallina, si lancia un dado e i sei punteggi sono così suddivisi: Esce 1, si estrae una pallina dalla prima urna;

- a) Esce 2 o 3, si estrae una pallina dalla seconda urna;
 - b) Esce 4 o 5 o 6, si estrae una pallina dalla terza urna
 - c) Nell'ipotesi che la pallina estratta sia rossa, qual è la probabilità che essa provenga dalla seconda urna?
-

(P2) Un'urna contiene 2 biglie bianche e 5 nere. Estraiamo una prima biglia: se è nera, la rimettiamo dentro con altre due dello stesso colore, se è bianca, non rimettiamo niente. Estruendo la seconda biglia, qual è la probabilità che sia nera?

(P3) Dato un triangolo equilatero di lato 10 cm, prendi, internamente a ciascuno dei suoi lati due punti a distanza x cm dagli estremi del lato in modo tale che questi sei punti siano i vertici di un esagono. La figura ottenuta rappresenta il bersaglio che viene utilizzato in una gara di tiro. Il triangolo è la superficie di tiro e la superficie dell'esagono rappresenta il bersaglio. Con quale probabilità $p(x)$ faccio centro facendo un tiro soltanto? Per quale valore di x ottieni come probabilità $1/4$? In questo caso il bersaglio che forma assume?

(P4) Lanciando un dado truccato la probabilità che esca il numero 6 è pari a $1/3$, la probabilità che esca 4 è pari a $1/6$, la probabilità che esca 5 è pari a $1/6$ mentre gli altri eventi elementari hanno uguale probabilità. Calcolare la probabilità che

- a) lanciando il dado tre volte si ottenga a) tre volte 6, b) non si ottenga nessun 6, c) la somma 15
 - b) lanciando il dado due volte si ottenga almeno un numero pari
 - c) lanciando il dado n volte si ottenga almeno un numero dispari. Si determini n in modo che tale probabilità sia maggiore del 95%.
-

Goniometria e trigonometria

(Ts1) Considera i numeri complessi $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ e $z_2 = 1 - i$.

d) Scrivi i numeri z_1 e z_2 in forma goniometrica.

e) Scrivi in forma algebrica il numero $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

f) Detti θ_1 e θ_2 gli argomenti rispettivamente di z_1 e z_2 , esprimi z_3 in funzione di θ_1 e θ_2 e dall'uguaglianza ottenuta deduci il valore esatto di $\cos \frac{\pi}{12}$ e $\sin \frac{\pi}{12}$.

(Ts2) Siano $z_1 = x + i(y + 1)$ e $z_2 = (x - 1) - iy$ due numeri complessi e sia $z = z_1 \cdot z_2$ il loro prodotto. Rappresentare in un sistema di assi cartesiani la parte di piano che soddisfa $R(z) \leq 0$, dove $R(z)$ rappresenta la parte reale del numero complesso, e se ne calcoli l'area.

Competenze coinvolte:

- applicazione dell'algebra dei numeri complessi
- rappresentazione analitica di una parte di piano
- scomposizione di figure piane in somme/differenze di aree note; calcolo area segmento circolare.

(Ts3) Una nave posta nel punto B, deve raggiungere il porto, rappresentato da A. Non può percorrere la rotta BA perché la profondità non lo consente; prosegue perciò fino a C, quindi da C giunge in A (il porto). Risulta che l'angolo BAC è 120° ; inoltre la nave viaggia a velocità costante di 24 km/h e impiega 20 minuti per percorrere il tratto BC e 15 minuti per percorrere il tratto CA.

c) Quando la nave era in A, quale era la sua distanza dal porto?

d) Se la nave avesse potuto percorrere direttamente la rotta AB, quanto tempo avrebbe risparmiato